ԳԼՈՒԽ

6

ՄՈԴՈՒԼ ԵՎ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§1 ԹՎԻ ՄՈԴՈՒԼԸ

Հատկություն 1: Թվի մոդուլը բացասական չէ: Այսինքն, կամայական a թվի համար՝ $|a| \geq 0$:

Ապացուցումը: Իսկապես, a թվի համար հնարավոր է երեք դեպք.

ա. $a > 0$: Այդ դեպքում $|a| = a$: Ուրեմն՝ $|a| \geq 0$:

բ. $a = 0$: Այդ դեպքում $|a| = 0$: Հետևաբար՝ $|a| \geq 0$:

գ. $a < 0$: Այդ դեպքում $|a| = -a$ և $-a > 0$: Ուրեմն՝ $|a| > 0$: Հետևաբար՝ $|a| \geq 0$:

Հատկություն 2: Թվի մոդուլը հավասար է զրոյի նշանակում է՝ թիվը հավասար է զրոյի:

Հատկություն 3. Հակադիր թվերի մոդուլները հավասար են: Այսինքն, կամայական a թվի համար՝ $|-a| = |a|$:

Ապացուցումը: Տարբերենք երեք դեպք:

ա. $a > 0$: Այդ դեպքում $-a < 0$, $|-a| = -(-a) = a = |a|$, և $|-a| = |a|$:

բ. $a < 0$: Այդ դեպքում $-a > 0$, $|a| = -a = |-a|$ և $|-a| = |a|$:

գ. $a = 0$: Այդ դեպքում $-a = 0$, $|-a| = 0 = |a|$ և $|-a| = |a|$:

Հատկություն 4: ա. Թվի մոդուլը փոքր չէ թվից՝ կամայական a թվի համար $a \le |a|$:

բ. Երկու դրական թվերից մեծի մոդուլը նույնպես մեծ է, այսինքն՝ եթե

$$0 < a < b, \text{ ապա } |a| < |b|:$$

գ.Երկու բացասական թվերից փոքրի մոդուլը ավելի մեծ է, այսինքն՝ եթե

$$b < a < 0, \text{ ապա } |a| < |b|:$$

Ապացուցումը: ա. Իսկապես, համաձայն մոդուլի սահմանման, $a = 0$ և $a > 0$ դեպքերում $a = |a|$, իսկ $a < 0$ դեպքում $a < |a|$:

բ. Եթե թվերը դրական են, ապա նրանք համընկնում են իրենց մոդուլների հետ: Դրանից էլ հետևում է որ դրական թվերից մեծի մոդուլը նույնպես մեծ է:

գ. Եթե $0 < b < a$, ապա $–0 > –b > –a$: Համաձայն ա–ի՝ $|–b| > |–a|$ կամ $|a| < |b|$:

Հատկություն 5: Կամայական a թվի համար՝ $|a|^2 = a^2$:

Ապացուցումը: ա. $a > 0$: Այդ դեպքում $|a| = a$ և $|a|^2 = a^2$:

բ. $a = 0$: Այդ դեպքում $|0| = 0$ և $|0|2 = 02$:

գ. $a < 0$: Այդ դեպքում $|a| = –a$ և $|a|^2 = |a||a| = –a·–a= a^2$:

Հատկություն 6. Արտադրյալի մոդուլը հավասար է արտադրիչների մոդուլների արտադրյալին: Այսինքն, կամյական a և b թվերի համար՝ $|a·b| = |a|·|b|$:

Ապացուցումը: Եթե a և b թվերը ունեն նույն նշանը, ապա $|a·b|=|a|·|b|$ բանաձևի ձախ մասի $a·b$ արտահայտությունը դրական է և, ուրեմն, $|a.b|= ab$: Բայց այդ դեպքում նաև $|a|·|b| = ab$: Հետևաբար $|a·b| = |a|·|b|$ բանաձևը հավասարություն է:

Իսկ եթե a և b թվերը ունեն տարբեր նշաններ, ապա $|a·b| = –ab$, և նաև $|a|·|b| = –ab$: Հետևաբար $|a·b| = |a|·|b|$ բանաձևը դարձյալ հավասարություն է:

Մնում է քննարկել այն դեպքը, երբ a և b թվերից գոնե մեկը զրո է: Բայց այդ դեպքում էլ $|a·b| = |a|·|b|$ բանաձևի երկու մասերը կդառնան զրո, և այն կդանա հավասարություն:

Հետևանք 1: Կամայական a և դրական c թվի համար $|ca| = c|a|$:

Ապացուցումը: Համաձայն 6 հատկության ունենք՝ $|ca| = |c||a| = c|a|$:

Հետևանք 2: Կամայական a թվի համար՝ $|a^2| = |a|^2$:

Ապացուցումը: Բավական է 6 հատկության մեջ վերցնել $a = b$:

Հատկություն 7: Կամայական a թվի համար՝ $\sqrt{a^2} = |a|$:

Ապացուցումը: Ունենք $|a| \geq 0$ /հատկություն 1/ և $|a|^2 = a^2$ /հատկություն 5/: Համաձայն քառակուսի արմատի սահմանման՝ $|a| = \sqrt{a^2}$:

Հատկություն 8. Կամյական a և զրոյից տարբեր b թվերի համար՝ $|a{:}b| = |a|{:}|b|$:

Ապացուցումը: Քանի որ $|a{:}b||b| = |a{:}b \cdot b| = |a|$, ապա $|a{:}b| = |a|{:}|b|$:

Հետևանք: Զրոյից տարբեր կամայական a թվի համար՝

$$|1/a|=1/(|a|):$$

Ապացուցումը հետևում է հատկություն 8–ից:

Հատկություն 9. Գումարի մոդուլը մեծ չէ գումարելիների մոդուլների գումարից: Այսինքն, կամյական a և b թվերի համար՝

$$|a+b| \leq |a|+|b|:$$

Ապացուցումը: Համաձայն գլուխ 3–ի երկրորդ կետի օրենք 2–ի, $|a+b|$ և $|a|+|b|$ թվերից առաջինը պետք է լինի կամ երկրորդից փոքր, կամ նրան հավասար, կամ էլ նրանից մեծ: Մեզ անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ վերջին դեպքը հնարավոր չէ: Ենթադրենք հակառակը.դիցուք ինչ–որ a և b թվերի համար՝ $|a+b|>|a|+|b|$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$(a+b)^2>(|a|+|b|)^2,\ a^2+2ab+b^2>a^2+2\cdot|a|\cdot|b|+b^2,\ ab>|a|\cdot|b|,\ ab>|ab|:$$

Իսկ այդ վերջին՝ $ab>|ab|$ անհավասարությունը անհնար է համաձայն հատկություն 4ա–ի: Ստացված հակասությունն էլ ցույց է տալիս $|a+b| \leq |a|+|b|$ բանաձևի ճշմարտացիությունը: