

## 2-րդ. Վերջից լուծվող խնդիրներ

(ետդարձման մեթոդով լուծվող)



### Արի խնդիր լուծենք

Այս դասի խնդիրներում անհայտի հետ **հաջորդաբար** մեկ կամ մի շարք **որոշակի գործողություններ** են կատարվում, որոնցից հետո **վերջնական արդյունքն է հայտնի** լինում: Անհայտն անուղղակիորեն բոլոր գործողությունների մասնակցում է, ուստի թեև անհայտի հետ հաջորդաբար կատարվող գործողությունները որոշակի են, սակայն միջանկյալ արդյունքներն անհայտ են: Հայտնի է վերջնական արդյունքը: Հասկանալի է, որ անհայտը գտնելու համար վերջին տվյալի հետ հակառակ կարգով հակադարձ գործողությունները պետք է կատարել:

Երբ նման խնդիրներ բանավոր լուծել փորձեք, կզգաք, որ հիմնական պրոբլեմը ճիշտ գործողությունները ճիշտ հերթականությամբ հիշելն է (որևէ մեկը խառնելու դեպքում ամեն ինչ խառնվում է):

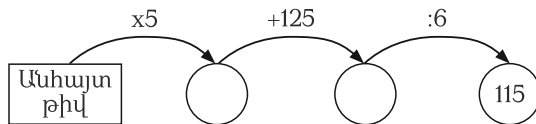
Բոլոր խնդիրները հնարավոր է լուծել միայն դրանք մինչև վերջ, խորապես ըմբռնելու դեպքում: Իսկ խնդիրների ըմբռնման համար բոլորս էլ, շատ թե քիչ, սևագրի վրա դրանց տվյալների (այն, ինչ հայտնի է) և պահանջների (այն, ինչ պետք է որոշվի, գտնվի) որոշ պատկերումներ ենք անում, այսինքն՝ որոշակի գծապատկերներ (սխեմաներ) ենք օգտագործում:

Վերջից լուծվող խնդիրներում գծապատկերման ձև ենք առաջարկում, որը խիստ օգտակար կարող է լինել: Այսպես.

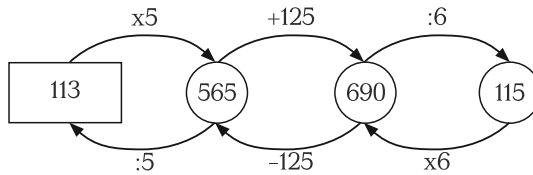


**Խնդիր 1.** Եթե մտապահաձս թիվը 5 անգամ մեծացնեն, արդյունքին 125 ավելացնեն և ստացվածը 6-ի բաժանեն, 115 կստացվի: Ինչ թիվ եմ մտապահել:

Այս խնդիրն այսպես կարելի է պատկերել.



Այստեղ և՛ գործողությունները, և՛ դրանց հերթականությունը հստակ երևում են: Մնում է հակադարձ գործողություններն ու դրանց հերթականությունը որոշել: Վերջում բաժանում ենք 6-ի, հետևաբար նախ վերջնական արդյունքը 6-ով կբազմապատկենք, կստանանք  $115 \times 6 = 690$ , հետո 125 կհանենք, այսինքն՝  $690 - 125 = 565$  և վերջում ստացվածը 5-ի կբաժանենք:



Նշանակում է անհայտ թիվը **113**-ն է:

Պատ.՝ 113:

Հասկանալի է, որ գծապատկերելով լուծելն անպայման չէ: Պարզապես *գծապատկերելու դեպքում այլևս որևէ բացատրություն տալու կարիք չկա*: Հակառակ դեպքում լուծման մեջ տրամաբանական քայլերը պետք է նշել (գունե ինքներդ ձեզ ասեք): Օրինակ, այս խնդրում պիտի քայլ առ քայլ ետ գնանք: Այսպես՝ «Ամիջականորեն 6-ի բաժանելուց ստացվել է 115, ուրեմն դրանից առաջ եղել է 115-ից 6 անգամ ավելի՝  $115 \times 6 = 690$ »: Ինքներս մեզ հարցնում ենք. «Ամիջապես որ գործողությունից հետո է 690 ստացվել»: Հարցի պատասխանը հաջորդ տրամաբանական քայլն է՝ «125 ավելացնելուց հետո 690 է ստացվել, ուրեմն դրանից առաջ եղել է 690-ից 125-ով պակաս՝ 565»: Հաջորդը՝ «5 անգամ մեծացնելուց հետո 565 է դարձել, ուրեմն դրանից առաջ եղել է 565-ից 5 անգամ քիչ՝ 113»: Ընդհանրապես նման խնդիրները լուծելիս ամենաբնականը և հարմարը հետևյալ կառուցվածքի տրամաբանական քայլն է՝ **«... գործողությունից հետո դարձել է..., ուրեմն դրանից առաջ եղել է...»**:

Վերջից լուծվող խնդիրների *երկրորդ տեսակը* տարբերվում է նրանով, որ անհայտի հետ կատարվող գործողություններն ուղղակի նշված չեն (կարծես քողարկված, ծածկագրված լինեն): Այստեղ բարդությունը դրանց թվաբանական այս կամ այն գործողության տեսք տալն է:

Խնդիրների միջոցով մոտեցումները պարզաբանենք:



**Խնդիր 2.** Արամը Բաբկենին 40 դր. տվեց, հետո Բաբկենն Արամին տվեց երեք անգամ շատ, քան մնացել էր Արամի մոտ: Նույն գործողությունները ևս երկու անգամ կատարելուց հետո Արամի մոտ 480 դր. եղավ, իսկ Բաբկենի մոտ՝ 20: Յուրաքանչյուրը քանի՞ դրամ ուներ սկզբում:

Խնդրի լուծման հետ կապված այսպիսի բան նկատենք: «Բաբկենն Արամին տվեց 3 անգամ շատ, քան մնացել էր Արամի մոտ» մտքից հասկանում ենք, որ եթե Արամի մոտ, օրինակ, 2 դր. էր, Բաբկենը նրան  $3 \times 2 = 6$  (դր.) տվեց, և նրա մոտ **8 դր.** ( $4 \times 2$ ) դարձավ: Ընդհանուր առմամբ, **եթե Արամին տալիս են նրա ունեցած գումարի եռապատիկը, նրա գումարը սկզբնականի քառապատիկն է դառնում՝ քառապատկվում է**: Այժմ արդեն նշված պայմանը քողարկված չէ, որոշակի գործողություն է ցույց տալիս՝ բազմապատկում 4-ով: Արդեն պայմանները հստակ են և կարող ենք վերջից առաջ գնալ:

Այսպիսով, 480 դրամը նախորդ քայլում Արամի ունեցածի քառապատիկն է: Նշանակում

է, նա դրանից առաջ ունեցել է 480-ից 4 անգամ քիչ՝ 120 դր.: Ուրեմն Բաբկենը նրան տվել է  $3 \times 120 = 360$  (դր.): Այսինքն, եթե Բաբկենը Արամին 360 դր. է տվել և իր մոտ 20 դր. է մնացել, նշանակում է դրանից առաջ Բաբկենը 380 դր. (20+360) ուներ: Քայլ առ քայլ ետ ենք դառնում՝ տվածը ետ ենք վերցնում, ստացածը՝ վերադարձնում: Եվ այսպես վերլուծում ենք բոլոր քայլերը:

Դա կարելի է նաև երկու այսպիսի սյունակի տեսքով գրանցել՝

	Արամ	Բաբկեն
վերջում	480	20
	120	380
	160	340
	40	460
	80	420
	20	480
սկզբում	60	440

*Պատր.՝ 60դր., 440դր.:*

Իդեալ, քանի որ փողը մեկից մյուսին է փոխանցվում, ուրեմն բոլոր քայլերում երկուսը միասին 500 դր. (480+20) ունեն: Նշանակում է մեկի գումարը տրամաբանելով գտնելուց հետո մյուսինը կարող եք որոշել 500-ից դա հանելով: Օրինակ՝ Ա-ն 120 դր. ունի, ուրեմն Բ-ն  $500 - 120 = 380$  ունի:

Գործը հեշտացնելու համար կարելի է, սրանից բացի, սյունակների կողքին (աջում) փոքր սխեմայով ցույց տալ, թե ինչ հերթականությամբ են իրար փող տվել: Ամեն քայլից հետո էլ կարելի է ֆիքսել՝ ո՞ր հասանք: Դա հեշտացնում է վերջից սկիզբ գնալը պատկերացնելը:

սկզբում	Ա	→	Բ	
	Բ	→	Ա	
	Ա	→	Բ	
	Բ	→	Ա	
	Ա	→	Բ	
վերջում	Բ	→	Ա	↑

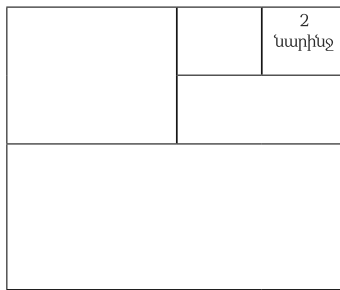
Նկատենք, որ այս խնդիրը լուծելու համար հավասարումներ կազմելը շատ ավելի դժվար է, քան այս աղյուսակով աշխատելը:



**Խնդիր 4.** Վաճառողն առաջին գնորդին նարինջների կեսը վաճառեց, երկրորդին՝ մնացածի կեսը: Նույն կերպ նարինջներ վաճառեց ևս երկու մարդու: Երբ հինգերորդ գնորդը մոտեցավ, վաճառողի մոտ 2 նարինջ էր մնացել: Վաճառողն սկզբում քանի նարինջ ուներ և յուրաքանչյուր գնորդ քանիսը գնեց:

Ինչպես շատ հաճախ, մենք կարող ենք մեզ օգնել նկարելով, գծապատկերելով: Դա հարմար է հատկապես այն դեպքում, երբ մասերն արտահայտված են փոքր կոտորակներով: Օրինակ՝

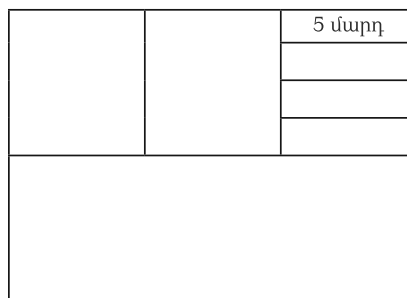
Կարող ենք հետևյալ կերպ նկարել.



*Պար.՝ 32 նարինջ:*



**Խնդիր 5.** Լիստի անվան երաժշտական մրցույթի մասնակիցների կեսը 2-րդ փուլ անցավ: Երկրորդ փուլի մասնակիցների  $\frac{1}{3}$ -ը 3-րդ փուլ անցավ: Եվ երրորդ փուլի մասնակիցների  $\frac{1}{4}$ -ը դափնեկիր դաճավ: Մրցույթին ընդամենը քանի մարդ մասնակցեց, եթե 5 մասնակից դափնեկիր կոչման արժանացան:



*Պար.՝ 120 մասնակից:*



**խնդիր 6.** Մի քանի երեխայի խնձոր էին տալիս: Առաջին երեխան 1 խնձոր ու մնացածի 1/10-ը ստացավ, երկրորդը՝ 2 խնձոր ու մնացածի 1/10-ը, երրորդը՝ 3 խնձոր ու մնացածի 1/10-ը և այլն: Պարզվեց, որ բոլորը նույնքան խնձոր էին ստացել: Սկզբում քանի խնձոր կար, եթե 9 երեխա էին:

Առաջին հայացքից երկրորդ տեսակի վերջից լուծվող խնդիր է: Իրականում այն շատ ավելի պարզ է լուծվում, եթե մինչև վերջ իրադրությունը հասկանանք:

Վերջում՝ իններորդ երեխան ստանում է 9 խնձոր ու մնացածի 1/10-ը, և այլևս խնձոր չի մնում: Այսինքն՝ **մնացածը արդեն 0 է** (եթե թվի 1/10-ը վերցնելուց հետո ոչինչ չի մնում, ուրեմն այնտեղ ոչինչ չկար):

Ստացվում է, որ իններորդ երեխան 9 խնձոր է ստացել, ուրեմն բոլոր ինը երեխաներն էլ նույնքան են ստացել (ըստ խնդրի պայմանի): Նշանակում է խնձորները  $9 \times 9 = 81$ -ն են եղել:

*Պատ.՝ 81 խնձոր:*



*Վերջից լուծվող երկրայլանի խնդիրները խորհուրդ ենք տալիս առանց գծապատկերելու, բանավոր լուծել. գծապատկերելու վրա ծախսվող ժամանակում կարող ես 2 տրամաբանական դատողությամբ առավել արագ ետ դառնալ (դա լավ է՝ նաև ուղեղը մարզելու համար):*

### ԶԳՈՒՅՇ

(առավել հաճախ հանդիպող սխալները)

- Ետդարձման երկուսից ավելի քայլերի առկայության դեպքում, անընդհատ, քայլ առ քայլ վերջից առաջ շաժվելու համար մշտապես քեզ համար կրկնիր՝ այսինչ մեծության արժեքը «... **գործողությունից հետո դարձել է..., ուրեմն դրանից առաջ եղել է...**»: Այլապես չես էլ զգա, թե ինչպես ես սխալ՝ սկզբից դեպի վերջ շարժվում:

- Քո մաթեմատիկական բոլոր գիտելիքներն օգտագործիր խնդրի «քողարկված» տվյալները ճիշտ հասկանալու, «վերծանելու» համար:



## Ազատ Ծավարկություն

- 22.** Եթե մտքում պահած թիվը 20 անգամ մեծացնենք, իսկ ստացածը՝ 20-ով, 140 կստացվի: Ո՞ր թիվն են մտքումս պահել:
- 23.** Աշակերտն աշխարհագրության ուսուցչից Արարատ լեռան բարձրությունը հարցրեց: Ուսուցիչը պատասխանեց, որ եթե Արարատի բարձրությունից 18 ոտք հանենք, ստացվածը 169 անգամ փոքրացնենք, 100 կստացվի: Արարատ լեռան բարձրությունը քանի՞ ոտք է:
- 24.** Եթե անհայտ թվին նույն թիվն ավելացնենք, 42-ից 70 անգամ մեծ թիվ կստացվի: Այդ ռոր թիվն է:
- 25.** Եթե անհայտ թվին նրա կրկնապատիկն ավելացնենք, 4575 կստացվի: Այդ ռոր թիվն է:
- 26.** Գյուղացին իր ունեցած կարտոֆիլի կեսը և էլի երկու պարկ վաճառեց, որից հետո նրա մոտ կարտոֆիլ չմնաց: Քանի՞ պարկ կարտոֆիլ ուներ:
- 27.** Գեղջկուհին առաջին գնորդին իր խնձորների կեսը վաճառեց, երկրորդին՝ մնացածի կեսը, իսկ երրորդին՝ մնացածի կեսն ու վերջին 5 խնձորը: Նա քանի՞ խնձոր վաճառեց:
- 28.** *Սատանան և ծույրը.* Գետի կամրջի մոտ սատանան ու ծույրը հանդիպեցին: Ծույրն իր աղքատությունից դժգոհեց: Սատանան ի պատասխան իր օգնությունն առաջարկեց. «Ամեն անգամ այս կամրջով անցնելիս քո փողը կկրկնապատկվի, սակայն յուրաքանչյուր անգամ դրանից հետո ինձ 24 կոպեկ պետք է տաս»: Ծույրը 3 անգամ կամրջով անցավ, իսկ երբ դրամապանակի մեջ նայեց, այն դատարկ էր: Սկզբում ծույրն ինչքան՞ փող ուներ:
- 29.** Երկու թփին 20 ճնճուկ էին նստած: Երկրորդ թփից 2 ճնճուկ թռան, հետո առաջինից 5-ը թռան, նստեցին երկրորդ թփին: Դրանից հետո յուրաքանչյուր թփի վրա հավասար թվով ճնճուկ էր նստած: Սկզբում ամեն թփի քանի՞նն էր նստած:
- 30.** Երկու կույտում լուցկու 16 հատիկ կա: Երբ առաջինից երկրորդի վրա այնքան հատիկ ավելացրին, որքան երկրորդում կար, իսկ հետո երկրորդից առաջինի վրա՝ առաջինում մնացած հատիկների չափ, արդյունքում կույտերի լուցկու հատիկները հավասարվեցին: Սկզբում ամեն կույտում լուցկու քանի՞ հատիկ կար:
- 31.** Սեղանին երեք կույտ ընկույզ էր դրված: Առաջին կույտից ընկույզների կեսը երկրորդի վրա լցրեցին, հետո երկրորդում ստացվածը երկու հավասար մասերի բաժանեցին և դրանցից մեկը երրորդի վրա ավելացրին: Երբ այնուհետև առաջինի վրա երրորդի կեսն ավելացրին, առաջինում 25 ընկույզ դարձավ, երկրորդում՝ 16, երրորդում՝ 11: Սկզբում ամեն կույտում քանի՞ ընկույզ կար:

- 32.** Արամը, Բագրատը, Գագիկն ու Դավիթը խաղում էին այնպիսի պայմանով, որ պարտվողը մյուսներից յուրաքանչյուրին այնքան ընկույզ տա, որքան կա վերջիններիս մոտ: Առաջինը պարտվեց Արամը, երկրորդը՝ Բագրատը, երրորդը՝ Գագիկը և չորրորդը՝ Դավիթը: Դրանից հետո նրանցից յուրաքանչյուրը 48 ընկույզ ունեցավ: Տղաներից յուրաքանչյուրն սկզբում քանի՞ ընկույզ ուներ:
- 33.** Մի լիճ գիտեմ, որում շուշաններ են աճում: Ըստ որում ամեն օր այնտեղ շուշաններով ծածկված մակերեսը կրկնապատկվում է: Երբ ինձ ասացին, որ լճի մակերևույթն ամբողջությամբ շուշաններով ծածկվել է 1 ամսում, հաշվեցի, թե լճի մակերևույթի կեսը ծածկվելու համար ինչքան ժամանակ է անհրաժեշտ եղել: Կարո՞ղ ես որոշել՝ ինչպե՞ս մտածեցի:
- 34.** Եթե անհայտ թվի  $\frac{3}{17}$ -ին  $4\frac{2}{3}$  ավելացնենք,  $6\frac{1}{6}$  կստացվի: Այդ ո՞ր թիվն է:
- 35.** Մեկն իր դրամի 0,5 մասը ծախսեց, հետո՝ մնացածի 0,75 մասը, որից հետո նրա մոտ 150 դր. մնաց: Մարդն ինչքան փող ուներ:
- 36.** *Շիրակացու խնդիր.* Մի վաճառական 3 քաղաքով անցավ, և նրանից առաջինում ունեցվածքի կեսի ու  $\frac{1}{3}$ -ի չափ հարկ գանձեցին, երկրորդում՝ մնացածի կեսի ու  $\frac{1}{3}$ -ի, երրորդում՝ մնացածի կեսի ու  $\frac{1}{3}$ -ի: Տուն վերադարձին վաճառականի մոտ 11 դահեկան (*փողի միավոր, ոսկեդրամ*) էր մնացել: Սկզբում քանի՞ դահեկան ուներ:
- 37.** Բևեռախույզներն ինքնաթիռի համար հրապարակ էին մաքրում: Ամեն հերթավոխին նրանք 360 խոր. մ ձյուն էին մաքրում, բայց դրանից հետո, երբ հանգստանում էին, քամին նորից դաշտն այնքան ձյուն էր լցնում, որքան մաքրելու էր մնում: Երրորդ հերթավոխում դաշտը մաքրվեց: Աշխատանքի սկզբում բևեռախույզները որքան ձյուն պետք է մաքրեին:
- 38\*.** Տղան 30՝ 15 կարմիր ու 15 սև գնդիկ ուներ: Դրանք շրջանաձև շարեց և նույն ուղղությամբ անընդհատ հաշվելով՝ ամեն 10-րդ գնդիկը հանեց մինչև միայն 15 կարմիր գնդիկները մնացին: Գնդիկներն սկզբում ինչպե՞ս էին դասավորված:

\* Այս խնդիրը նույն հաջողությամբ կարող էր առաջին բաժնում դրվել: