ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 9. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ԵՎ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԳՈՒՄԱՐԻ

Օրինակ 1: Ապացուցենք նույնությունը՝

$$4\cos\alpha\cos(60^0-\alpha)\cos(60^0+\alpha)=\cos 3\alpha:$$

Լուծում: Օգտվելով (2) բանաձևից, ձևափոխենք ապացուցվելիք նույնության ձախ մասը.

$$4\cos\alpha\cos(60^0-\alpha)\cos(60^0+\alpha)=$$

$$=4\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}(\cos(60^0+\alpha-60^0+\alpha)+\cos(60^0+\alpha+60^0-\alpha))=$$

$$=2\cos\alpha(\cos120^0+\cos2\alpha)=2\cos\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cos\alpha\cdot\cos2\alpha=$$

$$=-\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos\alpha=\cos3\alpha:$$

Այսպիսով, հավասարությունը տեղի ունի ցանկացած α անկյան համար:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ եթե $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ապա

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}:$$

Լուծում: Ձևափոխենք հավասարության ձախ մասը՝

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos(\pi-(\alpha+\beta))=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1=$$

$$=-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)+1=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)+1$$

$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1:$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք (6), (7), $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1$ բանաձևերից, ինչպես նաև՝ $\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi$, $\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$ և $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ բերման բանաձևերից:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ եթե α-ն, β-ն, γ-ն եռանկյան անկյունների մեծություններն են, ապա

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}:$$

Լուծում: $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ արտադրյալը ձևափոխենք գումարի (տե՛ս (3)-ը).

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}:$$

Պարզ է, որ $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le 1$ և $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}>0$:

Նկատի ունենալով այս փաստերը, գնահատենք վերջին արտահայտությունը.

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}:$$

Այժմ, օգտվելով $uv\le\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$ հայտնի անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\frac{\gamma}{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{8}:$$

Նկատենք, որ ապացուցված անհավասարության մեջ հավասարության դեպք տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, այսինքն՝ եթե եռանկյունը հավասարակողմ է:

Օրինակ 4: Գտնել գումարը՝

$$S=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha:$$

Լուծում: $\alpha=2\pi n$ $(n\in Z)$ դեպքում կունենանք՝ $S=0$:

Եթե $\alpha\neq 2\pi n$, այսինքն՝ $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, կարող ենք գրել՝

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha+\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha:$$

Ստացված հավասարության աջ մասի բոլոր գումարելիների վրա կիրառելով (3) բանաձևը՝ կստանանք.

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S=\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3}{2}\alpha\right)+\left(\cos\frac{3}{2}\alpha-\cos\frac{5}{2}\alpha\right)+\left(\cos\frac{5}{2}\alpha-\cos\frac{7}{2}\alpha\right)+$$
$$+\ldots+\left(\cos\frac{2n-3}{2}\alpha-\cos\frac{2n-1}{2}\alpha\right)$$
$$+\left(\cos\frac{2n-1}{2}\alpha-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right)=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha:$$

Վերջին արտահայտությունը ձևափոխելով արտադրյալի (ըստ (7) բանաձևի)՝ կունենանք.

$$2\sin\frac{\alpha}{2}S=2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n}{2}\alpha,$$

որտեղից՝

$$S=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\quad (\text{քանի որ } \sin\frac{\alpha}{2}\neq 0):$$

Այսպիսով,

$$S=0,\ \text{եթե}\ \alpha=2\pi n;\quad S=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ \text{եթե}\ \alpha\neq 2\pi n\ \ (n\in Z):$$