ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 9. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ԵՎ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԳՈՒՄԱՐԻ

Առաջադրանքներ

Ներկայացնել արտադրյալի կամ արտադրյալների հարաբերության տեսքով (1–2).

1. ա) $\sin^2 x - \sin^2 y$; բ) $\sin x + \cos x$; գ) $\sin x - \cos y$; դ) $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}^2 y$

2. ա) $\dfrac{\sin 25^0 + \sin 75^0}{\sin 25^0 - \sin 75^0}$; բ) $\dfrac{\cos 3\beta + \cos 5\beta}{\sin 3\beta + \sin 5\beta}$; գ) $\mathrm{tg}2x + \mathrm{tg}6x$:

Ապացուցել նույնությունը. (3–10).

3. ա) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$:

բ) $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{12}\right)$:

4. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$:

5. $\mathrm{tg}3\alpha - \mathrm{tg}2\alpha - \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}3\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha$:

6. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$:

7. $\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}(30^0 - \alpha) + \mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}(60^0 - \alpha) + \mathrm{tg}(60^0 - \alpha)\mathrm{tg}(30^0 - \alpha) = 1$:

8. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha \sin\dfrac{n}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$:

9*. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\cdots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$:

10*. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin\alpha}{2\sin\alpha}+\dfrac{n}{2}$:

Ապացուցել թվային հավասարությունը (11–14).

11*. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{9}\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{9}=\sqrt{3}$:

12. $\cos 24^0+\cos 48^0-\cos 84^0-\cos 12^0=\dfrac{1}{2}$:

13. $\sin^2\dfrac{\pi}{7}\sin^2\dfrac{2\pi}{7}\sin^2\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{7}{64}$:

14*. $\operatorname{tg}^2 36^0\operatorname{tg}^2 72^0=5$:

Ապացուցել պնդումը (15–21).

15. Եթե $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ապա $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$:

16. Եթե $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ապա $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$:

17. Եթե $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ապա $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$:

18. Եթե $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ընդ որում $\alpha,\beta,\gamma\neq\pi n\ (n\in Z)$, ապա
$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$:

19. Եթե $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, ապա $\alpha+\beta+\gamma=\pi n\ (n\in Z)$:

20. Եթե $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=m$, ապա $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=m-1$:

21. Եթե $\cos\alpha+\cos\beta=m$, $\sin\alpha+\sin\beta=n$ և $m^2+n^2\neq 0$, ապա $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$:

Դիցուք՝ α-ն, β-ն և γ-ն որևէ եռանկյան անկյունների մեծություններն են: Ապացուցել, որ (22–30).

22*. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\dfrac{3}{2}$:

23*. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$:

24*. $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\beta}{2}+\sin\dfrac{\gamma}{2}\leq\dfrac{3}{2}$:

25*. $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$:

26*. $\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma\ge\sqrt{3}$:

27*. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$:

28*. $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma\ge 3\sqrt{3}\ (\alpha,\beta,\gamma<90^0)$:

29*. $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\ge\frac{3}{4}$:

30*. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$:

ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ, ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ, ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

8. ***Ցուցում:*** Օգտվելով $2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos k\alpha=\sin(\frac{\alpha}{2}+k\alpha)-\sin(k\alpha-\frac{\alpha}{2})$ նույնությունից՝ կարող ենք գրել.

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos 2\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos 3\alpha+\ldots+$$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(n-1)\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos n\alpha=$$

$$=\sin\frac{3}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5}{2}\alpha-\sin\frac{3}{2}\alpha+\sin\frac{7}{2}\alpha-\sin\frac{5}{2}\alpha+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\alpha-$$

$$-\sin\frac{2n-3}{2}\alpha+\sin\frac{2n+1}{2}\alpha-\sin\frac{2n-1}{2}\alpha=$$

$$=\sin\frac{2n+1}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n}{2}\alpha:$$

Ստացված նույնությունը տեղի ունի α-ի ցանկացած արժեքի դեպքում:

Երբ $\sin\frac{\alpha}{2}\ne 0\ \ (\alpha\ne 2\pi n,\ \ m\in Z)$, երկու մասերը բաժանելով $\sin\frac{\alpha}{2}$-ի, կունենանք ապացուցվելիք նույնությունը:

Առաջարկվում է տրված նույնությունն ապացուցել նաև մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

9. ***Ցուցում:*** Կիրառել $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha$ նույնությունը: Տրված նույնությունը կարելի է ապացուցել նաև մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի կիրառմամբ:

10. ***Ցուցում:*** Ձևափոխենք նույնության ձախ մասի արտահայտությունը. նշանակենք այն S_n –ով: Ունենք՝

$$S_n = \frac{1}{2}(n + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + ... + \cos 2n\alpha)) =$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + ... + \cos 2n\alpha):$$

Այնուհետև օգտվել N 8 առաջադրանքի լուծման արդյունքից՝ որում ամենուրեք α –ն փոխարինելով 2α –ով:

Առաջարկվում է խնդիրը լուծել նաև մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի կիրառմամբ:

11. Ցուցում: Ունենք՝

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9} = \operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ = \frac{\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ}{\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}:$$

Այնուհետև ապացուցել, որ $\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$,

իսկ $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ = \frac{1}{8}$:

Հետևաբար,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9} = \sqrt{3}:$$

12. ***Ցուցում***: Ձևափոխենք հավասարության ձախ մասի արտահայտությունը.

$$(\cos 24^\circ - \cos 84^\circ) + (\cos 48^\circ - \cos 12^\circ) = 2\sin 54^\circ\cdot\sin 30^\circ - 2\sin 30^\circ\cdot\sin 18^\circ =$$

$$= \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}:$$

Ինքնուրույն ապացուցեք, որ $\sin 18^0\cdot\cos 36^0 = \frac{1}{4}$

13. Լուծում:

$$a = \sin^2\frac{\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}\cdot(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 6\alpha),$$

որտեղ $\alpha=\frac{\pi}{7}$: Հաշվի առնելով, որ $\cos 4\alpha=-\cos 3\alpha$, $\cos 6\alpha=-\cos\alpha$, փակագծերը բացվելուց և արտադրյալը գումարի ձևափոխելու բանաձևերի կիրառմամբ, որոշ քայլերից հետո կստանանք՝

$$a=\frac{3}{32}+\frac{1}{32}(\cos\alpha+\cos 3\alpha-\cos 2\alpha):$$

Գտնենք $b=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$ արտահայտության արժեքը: Ունենք՝

$$b=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7})}{2\cos\frac{\pi}{14}}=$$

$$\frac{\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}:$$

Հետևաբար, $a=\frac{3}{32}+\frac{1}{32}\cdot b=\frac{3}{32}+\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{64}$:

14. Լուծում: Գտնենք $\sin^2 36^0\cdot\sin^2 72^0$ և $\cos^2 36^0\cdot\cos^2 72^0$ արտահայտությունների թվային արժեքները.

$$\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ=\frac{4\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 72^\circ\cdot\cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{1}{4}:$$

Հետևաբար, $\cos^2 36^0\cdot\cos^2 72^0=\frac{1}{16}$:

$$\sin^2 36^0\cdot\sin^2 72^0=\frac{1}{4}(1-\cos 72^0)(1-\cos 144^0)=\frac{1}{4}(1-\cos 72^0)(1+\cos 36^0)=$$

$$=\frac{1}{4}(1-(\cos 72^0-\cos 36^0)-\cos 36^0\cdot\cos 72^0)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\sin 54^0\cdot\sin 18^0-\cos 36^0\cdot\cos 72^0)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cdot\cos 36^0\cdot\cos 72^0-\cos 36^0\cdot\cos 72^0)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 36^0\cdot\cos 72^0)=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4})=\frac{5}{16}$$

Այսպիսով,

$$\mathrm{tg}^2 36^0 \cdot \mathrm{tg}^2 72^0 = \frac{\sin^2 36^0 \cdot \sin^2 72^0}{\cos^2 36^0 \cdot \cos^2 72^0} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{1}{16}} = 5:$$

Այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

15. ***Ցուցում:***

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\pi - (\alpha+\beta)) =$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha+\beta) =$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$4\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2})\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}:$$

16. ***Ցուցում:*** Ձևափոխենք հավասարության ձախ մասի արտահայտությունը.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma\right) =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos(2\pi - (2\alpha + 2\beta))) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \cos 2(\alpha+\beta)) =$$

$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) =$$

$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) =$$

$$= 1 + \cos(\pi-\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma:$$

17. ***Ցուցում:*** Ձևափոխենք ձախ մասի արտահայտությունը.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta)) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) - 1) =$$

$$= 2 - \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) = 2 + 2\cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta:$$

18. ***Ցուցում:*** Խնդրի պայմանի համաձայն ապացուցվելիք հավասարությունը համարժեք է հետևյալ հավասարությանը՝

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1:$$

Լուծում: Ունենք՝

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $(\alpha>0,\ \ \beta>0,\ \ \gamma>0)$: Հետևաբար,

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=1:$$