ԳԼՈՒԽ 4

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 8. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԸ

4. Կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Օրինակ 1: Հաշվենք $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$-ը, եթե $\cos\alpha=-0{,}6$ և $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$:

Լուծում: Օգտվելով (3) բանաձևից, կստանանք՝

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}}\ \text{(քանի որ } \frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{4}<\frac{3\pi}{8}\Rightarrow tg\frac{\alpha}{4}>0\text{):}$$

Ունենք՝ $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1-0{,}6}{2}=\frac{1}{5}$:

Քանի որ $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$, ուստի $\cos\alpha<0$: Հետևաբար, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$:

Այսպիսով, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

Օրինակ 2: Հաշվենք՝ $\sin\frac{\pi}{8}$ և $\mathrm{tg}112^0 30'$:

Լուծում: Օգտվելով (2) նույնությունից՝ կարող ենք գրել՝

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\quad\left(\left|\sin\frac{\pi}{8}\right|=\sin\frac{\pi}{8},\text{ քանի որ } 0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}\ \text{ և }\ \sin\frac{\pi}{8}>0\right):$$

Տեղադրելով $\cos\frac{\pi}{4}$-ի արժեքը՝ կստանանք.

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}:$$

Այժմ, կիրառելով (3) բանաձևը $t=112^0 30'$ անկյան դեպքում, կստանանք՝

$$\left|\mathrm{tg}112^0 30'\right|=\sqrt{\frac{1-\cos 225^0}{1+\cos 225^0}}:$$

Նկատենք, որ $90^0<112^0 30'<180^0$, ուստի՝

$$\mathrm{tg}112^0 30'<0 \text{ և } \cos 225^0=\cos(180^0+45^0)=-\cos 45^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}:$$

Հետևաբար, $\mathrm{tg}112^0 30'=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=-(\sqrt{2}+1):$

Օրինակ 3: Ձևափոխենք արտադրյալի՝ $1-\sin\varphi+\cos\varphi$:

Լուծում: Ունենք՝

$$1-\sin\varphi+\cos\varphi=(1+\cos\varphi)-\sin\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right):$$

Օրինակ 4: Ապացուցենք հավասարությունը՝

$$\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}=2\sin\frac{\varphi}{2},\ \text{ եթե }\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}:$$

Լուծում: ***Առաջին եղանակ:*** Ունենք՝

$$1+\sin\varphi=\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2:$$

Նույն ձևով՝

$$1-\sin\varphi=\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2:$$

Ձևափոխենք ապացուցվելիք հավասարության ձախ մասը՝

$$F(\varphi)=\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}=\sqrt{\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}-$$

$$-\sqrt{\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right|-\left|\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right|:$$

Խնդրի պայմանից հետևում է, որ $0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{4}$, ուստի $\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}>0$ և $\sin\frac{\varphi}{2}\le\cos\frac{\varphi}{2}$ (այդ միջակայքում $\sin\frac{\varphi}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$, իսկ $\cos\frac{\varphi}{2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$): Այս նկատառումներով էլ ազատում ենք մոդուլների նշաններից.

$$F(\varphi)=\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}:$$

Երկրորդ եղանակ: Ակնհայտ է, որ նշված պայմանով հավասարության երկու մասերն էլ ոչբացասական են, ուստի բավական է ցույց տալ, որ հավասար են դրանց քառակուսիները: Իրոք.

$$\left(\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}\right)^2=1+\sin\varphi-2\sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\varphi)}+1-\sin\varphi=$$

$$=2-2\sqrt{1-\sin^2\varphi}=2-2\sqrt{\cos^2\varphi}=2-2|\cos\varphi|=2-2\cos\varphi:$$

$$\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2=4\sin^2\frac{\varphi}{2}=4\cdot\frac{1-\cos\varphi}{2}=2-2\cos\varphi:$$

Այսպիսով, $\left(\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}\right)^2=\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$, հետևաբար,

$$\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}=2\sin\frac{\varphi}{2}:$$