ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 8. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԸ

Բերման բանաձևերը

Գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերից, մասնավորաբար, ստացվում են հետևյալ նույնությունները.

$$\text{I}\quad \left[\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha\\ &\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\\ &\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha\\ &\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right.$$

$$\text{II}\quad \left[\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\\ &\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha\\ &\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha\\ &\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right.$$

$$\text{III}\quad \left[\begin{aligned} &\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ &\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ &\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\\ &\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}\right.$$

$$\text{IV}\quad \left[\begin{aligned} &\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ &\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\\ &\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\\ &\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}\right.$$

V $\begin{cases} \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \\ \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$ VI $\begin{cases} \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha \\ \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$

Վերոնշյալ վեց խումբ նույնությունները կոչվում են ***բերման*** բանաձևեր:

Ապացուցենք, օրինակ, II խմբի նույնությունները:

Կիրառելով երկու անկյունների գումարի սինուսի և կոսինուսի բանաձևերը՝ կունենանք՝

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$$

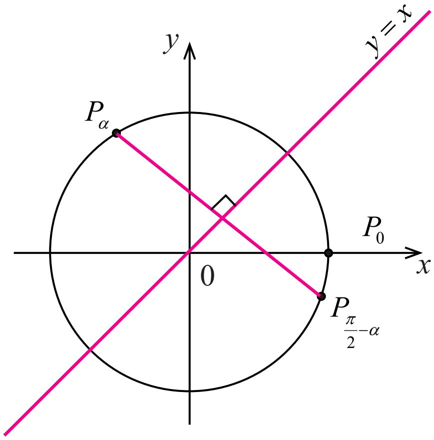
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha \quad (\alpha\neq\pi k,\ \ k\in Z)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{1}{-\operatorname{ctg}\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha \quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z\right)$$

Բերման մյուս բանաձևերի ապացուցումները կատարեք ինքնուրույն:

Դիտողություն: *Քանի որ սինուս և կոսինուս ֆունկցիաները սահմանվել են երկրաչափորեն (միավոր շրջանագծի միջոցով), ուստի բերման բոլոր բանաձևերը կարելի է արտածել երկրաչափական դատողություններով՝ հիմնվելով համաչափության հասկացության վրա: Օրինակ,* $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ *և* $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ *հավասարությունները հետևում են այն փաստից, որ միավոր շրջանագծի* P_α *և* $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ *կետերը համաչափ են* $y=x$ *ուղղի նկատմամբ, իսկ նման դեպքում* $M(x;y)$ *կետն անցնում է* $M'(y;x)$ *կետին (նկ. 1):*



Նկ. 1

Սինուսի և կոսինուսի պարբերականությունից բխում է, որ ցանկացած թվի եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքի հաշվումը կարելի է բերել $[-\pi;\pi]$ հատվածին պատկանող թվի եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը հաշվելուն: Մյուս կողմից՝ սինուսի կենտ և կոսինուսի զույգ լինելու շնորհիվ խնդիրը հանգեցվում է $[0;\pi]$ հատվածին պատկանող արգումենտի դեպքում ֆունկցիայի արժեքը հաշվելուն: Վերջապես, $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ և $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ նույնությունների շնորհիվ հարցը հանգեցվում է $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածում ընկած թվի եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը հաշվելուն: Ավելին. նկատենք, որ սինուսի և կոսինուսի արժեքները կապված են $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ առնչությամբ: Դրա համար էլ, ունենալով $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ հատվածում այդ երկու ֆունկցիաների արժեքների աղյուսակը, կարելի է գտնել նրանց արժեքները $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ում, իսկ այնուհետև, ինչպես նշվեց վերևում՝ ամբողջ թվային ուղղի վրա: Հանգունորեն, $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ հատվածի վրա $\operatorname{tg}x$ ֆունկցիայի և $\operatorname{ctg}x$ ֆունկցիայի արժեքներով կարելի է գտնել այդ ֆունկցիաների արժեքները ցանկացած թույլատրելի x-ի համար: Դրանով էլ արդարանում է «***բերման բանաձևեր***» անվանումը:

Ավելի ակնառու դառնալու համար նպատակահարմար է բերման բանաձևերը ներկայացնել աղյուսակի տեսքով.

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

Աղյուսակում նշված բերման բանաձևերը հեշտ հիշելու համար կարելի է կիրառել մտապահման հետևյալ կանոնը.

ա) Եթե x արգումենտը գումարված է 0–ին կամ π–ին կամ հանվում է այդ թվերից (տեղադրվում է հորիզոնական տրամագծից), ապա եռանկյունաչափական ֆունցիայի անունը չի փոխվում:

բ) Եթե x արգումենտը գումարվում է $\frac{\pi}{2}$–ին կամ $\frac{3\pi}{2}$–ին, կամ հանվում է այդ թվերից (տեղադրվում է ուղղաձիգ տրամագծից), ապա ֆունկցիայի անունը փոխվում է (սինուսը՝ կոսինուսի և հակառակը, տանգենսը՝ կոտանգենսի և հակառակը):

գ) Համարելով, որ $0<x<\frac{\pi}{2}$, որոշվում է, թե որ քառորդում է գտնվում արգումենտը և ըստ այդմ էլ վերցվում է նշանը՝ x արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիայի առաջ:

Օրինակ 1: Պարզեցնենք արտահայտությունը.

$$f(\alpha)=\frac{\sin^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}:$$

Լուծում: Քանի որ cos ֆունկցիան զույգ է, իսկ sin և tg ֆունկցիաները՝ կենտ, կստանանք՝

$$f(\alpha)=\frac{\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^3\cos(2\pi-\alpha)}{\left(-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^3\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}:$$

Այնուհետև, կիրառելով բերման բանաձևերը, կստանանք.

$$f(\alpha)=\frac{(\cos\alpha)^3\cos\alpha}{(-ctg\alpha)^3(-\sin\alpha)^3}=\cos\alpha\,:$$

Այսպիսով, եթե $\sin\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0$, այսինքն՝ $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n\ (n\in Z)$, ապա $f(\alpha)=\cos\alpha$:

Օրինակ 2: Բերենք $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքի (45^0–ից փոքր դրական անկյան) եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքի.

ա) $\sin\frac{53\pi}{12}$, բ) $\cos 76^0$, գ) $\mathrm{tg}\left(-2\frac{2}{7}\pi\right)$, դ) $\mathrm{ctg}587^0$:

Լուծում: ա) $\sin\frac{53\pi}{12}=\sin\left(4\pi+\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$:

բ) $\cos 76^0=\cos(90^0-14^0)=\sin 14^0$:

գ) $\mathrm{tg}\left(-2\frac{2}{7}\pi\right)=-\mathrm{tg}2\frac{2}{7}\pi=-\mathrm{tg}\frac{2}{7}\pi=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)=-\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{14}$:

դ) $\mathrm{ctg}587^0=\mathrm{ctg}(3\cdot 180^0+47^0)=\mathrm{ctg}47^0=\mathrm{ctg}(90^0-43^0)=\mathrm{tg}43^0$:

Հարցեր

1. Ձևակերպել I և II խմբի բերման բանաձևերը:
2. Ձևակերպել III և IV խմբի բերման բանաձևերը:
3. Ձևակերպել V և VI խմբի բերման բանաձևերը:

Առաջադրանքներ

1. Ապացուցել բերման՝ II և IV խմբերի բանաձևերը:
2. Երկրաչափորեն ապացուցել բերման՝ I խմբի բանաձևերը:
3. Օգտվելով հաշվարկիչից կամ աղյուսակներից, հաշվել.

ա) $\sin 210^0$; բ) $\cos 420^0$; բ) $\mathrm{tg}(-765^0)$; գ) $\mathrm{ctg}840^0$;

դ) $\sin\left(8\frac{1}{6}\pi\right)$; ե) $\cos\left(\frac{51}{6}\pi\right)$; զ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{17}{4}\pi\right)$;

է) $\mathrm{ctg}\left(\frac{26}{3}\pi\right)$; ը) $\sin\left(-\frac{47}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{25}{4}\pi\right)-\sin\left(\frac{23}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{49}{4}\pi\right)$;

թ) $\sin 167^0 \sin 107^0 + \sin 257^0 \sin 197^0$ ։

4. Փոխարինել սուր անկյան եռանկյունաչական ֆունկցիայի արժեքով.

ա) $\cos 108^0$, բ) $\sin 215^0$, գ) $\mathrm{tg} 165^0$,

դ) $\cos 305^0$, ե) $\sin(-257^0)$, զ) $\mathrm{tg}(-244^0)$ ։

5. Բերել փոքրագույն դրական արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքի.

ա) $\sin\frac{28\pi}{3}$, բ) $\cos\left(2\frac{1}{7}\pi\right)$, գ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{58}{9}\pi\right)$, դ) $\sin\left(-\frac{29}{6}\pi\right)$,

ե) $\mathrm{tg}600^0$, զ) $\sin 75^0$, է) $\mathrm{ctg}(-600^0)$, ը) $\mathrm{ctg}(-946^0)$ ։

Պարզեցնել արտահայտությունը (6–9).

6. ա) $2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}(x-\pi) + \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$; բ) $\sin(\pi-\alpha)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ։

7. ա) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\pi-\beta)\mathrm{tg}(-\alpha)}$; բ) $\dfrac{1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{1-\sin^2(\pi+x)}$ ։

8. ա) $\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; բ) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)} - \dfrac{\mathrm{tg}(90^0-\alpha)}{\mathrm{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin(90^0+\alpha)}$ ։

9. ա) $\dfrac{\mathrm{tg}(270^0-\alpha)\sin 130^0 \cos 320^0 \sin 270^0}{\mathrm{ctg}(180^0-\alpha)\cos 50^0 \sin 220^0 \cos 360^0}$;

բ) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}$ ։

Ապացուցել նույնությունը(10–14).

10. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ ։

11. $\dfrac{\sin(x-\pi)\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\mathrm{ctg}(\pi-x)} = -1$ ։

12. $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{tg}(\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha) = 0$ ։

13. $$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\frac{tg2\alpha}{\sqrt{3}}:$$

14. $$\frac{(1+\sin\alpha)ctg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=2:$$

15. Ապացուցել, որ արտահայտության արժեքը կախված չէ α-ից.

ա) $\mathrm{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{8}(4n+3),\ n\in Z\right)$,

բ) $\dfrac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right)$:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

3. ը) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, թ) $\frac{1}{2}$: **6.** ա) 0, բ) $\cos\alpha$: **7.** ա) –1, բ) $\cos\alpha$: **8.** ա) $1-\sin\alpha$, բ) –1:
9. ա) $-\mathrm{tg}^2 50^0$, բ) $\cos\alpha$: