ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 8. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԸ

3. Կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Օրինակ 1: Ապացուցենք հավասարությունը՝

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}:$$

Լուծում: Օգտվելով $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ բերման բանաձևից, կարող ենք գրել՝

$$\cos\frac{3\pi}{7}=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{7}\right)=-\cos\frac{4\pi}{7}:$$

Նշանակելով ապացուցվելիք հավասարության ձախ մասը A-ով, կունենանք՝

$$A=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}:$$

Այժմ, վերջին հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք $2\sin\frac{\pi}{7}$-ով՝

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot A=-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}:$$

Այնուհետև, (1) բանաձևի շնորհիվ կունենանք՝

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7},\quad \sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7},\quad \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{7}:$$

Արդյունքում կստանանք՝

$$A=\frac{-\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}:$$

Դիտողություն: *Երբ հարկ է լինում ձևափոխել*

$$\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha \quad (\text{կամ } \cos\alpha\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha\,)$$

տեսքի արտադրյալը, հարմար է կիրառել, այսպես կոչված, «փաթաթման մեթոդը»: Այն հետևյալն է. տրված արտահայտությունը բազմապատկում և բաժանում են $\cos\alpha$ *–ով (կամ* $\sin\alpha$ *–ով), այնուհետև n անգամ կիրառելով* $\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi$ *նույնությունը, նշված արտահայտությունը զգալիորեն պարզեցվում է և ստացվում է՝*

$$\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\cos\alpha} \qquad \left(\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}\right):$$

Եթե հնարավոր է, որ տվյալ դեպքում $\cos\alpha$ *–ն (*$\sin\alpha$ *–ն) ընդունի զրո արժեք, ապա այն դիտարկվում է առանձին:*

Օրինակ 2: Հայտնի է, որ $\mathrm{tg}\alpha$ –ն ռացիոնալ թիվ է: Ապացուցենք, որ $\sin 2\alpha$ –ն և $\cos 2\alpha$ –ն ևս ռացիոնալ թվեր են: Ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը:

Լուծում: Այն, որ $\sin 2\alpha$ –ն և $\cos 2\alpha$ –ն ռացիոնալ թվեր են, հետևում է (6) և (7) բանաձևերից (թվաբանական չորս գործողությունները ռացիոնալ թվերը բերում են ռացիոնալ թվերի): Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ: Բերենք օրինակներ.

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}=\mathrm{tg}30^0$ –ը իռացիոնալ թիվ է, մինչդեռ $\cos(2\cdot 30^0)=\cos 60^0=\frac{1}{2}$ –ը ռացիոնալ թիվ է:

2) Ունենք՝ $\mathrm{tg}15^0=\mathrm{tg}(45^0-30^0)=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$, որն իռացիոնալ թիվ է, մինչդեռ $\sin(2\cdot 15^0)=\sin 30^0=\frac{1}{2}$ –ը ռացիոնալ թիվ է: