ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 8. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԸ

Գումարման բանաձևերի կիրառման օրինակներ

Սույն պարագրաֆի 1–2 կետերում ստացված բանաձևերը լայն կիրառություններ ունեն մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում: Ավելի ակնառու դառնալու համար ի մի բերենք և համատեղ ներկայացնենք այդ բանաձևերը.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{3}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \tag{6}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta} \tag{8}$$

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Հաշվենք $\sin 15^0$–ը և $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$–ը:

Լուծում: 15^0–ը ներկայացնելով 45^0–30^0 տարբերության տեսքով, ապա կիրառելով (4) բանաձևը, կստանանք՝

$$\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-1}{4}:$$

$\frac{7\pi}{12}$–ը ներկայացնելով $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$ գումարի տեսքով, ապա օգտվելով (5) բանաձևից, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $\sin(\alpha-\beta)$–ն, եթե

$$\sin\alpha = -\frac{3}{4},\ \ \cos\beta = -\frac{1}{4},\ \ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \ \text{ և } \ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}:$$

Լուծում: Նախ գտնենք $\cos\alpha$–ն և $\sin\beta$–ն: Ունենք՝

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ \text{ և } \ \sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}:$$

Քանի որ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, ուստի $\cos\alpha > 0$, հետևաբար, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$: $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ պայմանից հետևում է, որ $\sin\beta < 0$, ուրեմն՝ $\sin\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$:

Այժմ օգտվենք (4) բանաձևից.

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{7}}{4}\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{105}}{16}:$$

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ եթե եռանկյան երկու անկյունների կոսինուսների հարաբերությունը հավասար է այդ նույն անկյունների սինուսների հարաբերությանը, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

Լուծում: Դիցուք՝ նշված հատկությամբ օժտված անկյուններն են α–ն և β–ն, այսինքն՝ $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$: Այս հավասարությունից կունենանք՝

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = 0,$$

որը (4) բանաձևի շնորհիվ կներկայացվի այսպես՝

$$\sin(\alpha-\beta)=0:$$

Պարզ է, որ եռանկյան α և β անկյունների համար $|\alpha-\beta|<\pi$, հետևաբար այդ պայմանին բավարարող միակ՝ $(\alpha-\beta)$ թիվը 0-ն է, որը բավարարում է նաև վերջին հավասարությանը: Այսպիսով, $\alpha-\beta=0$, որտեղից՝ $\alpha=\beta$, նշանակում է՝ եռանկյունը հավասարասրուն է:

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ եթե $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, ընդ որում $\alpha, \beta, \gamma \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n \quad (n\in Z)$, ապա $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha=1$:

Լուծում: Հաշվի առնելով $\gamma=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$ պայմանը՝ ապացուցվելիք հավասարության ձախ մասը ձևափոխենք այսպես՝

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma(\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha)=$$

$$=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)=$$

$$=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)=$$

$$=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\frac{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta=1:$$

Ապացուցվեց այն, ինչ պահանջվում էր:

Օրինակ 5: $\sin\alpha-\cos\alpha$ արտահայտության ամենամեծ ու ամենափոքր արժեքները:

Լուծում: Ունենք՝ $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right):$$

Ակնհայտ է, որ վերջին արտահայտության մեծագույն արժեքը $\sqrt{2}$-ն է:

Առաջադրանքներ

Գտնել արտահայտության արժեքը.

1. ա) $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{5}-\sin\dfrac{\pi}{15}\sin\dfrac{3\pi}{5}$; բ) $\sin0,1\pi\cos0,4\pi+\cos0,1\pi\sin0,4\pi$:

2. Գտնել՝ $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$ արտահայտության արժեքը, եթե $tg\alpha=2$ և

$\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$:

3. Ապացուցել, որ եթե $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ընդ որում $\alpha,\beta,\gamma \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n \ (n\in Z)$, ապա $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma$:

4. Ապացուցել, որ եթե $p=\mathrm{tg}10^0$, $q=\mathrm{tg}25^0$, $s=\mathrm{tg}55^0$, ապա $pq+qs+sp=1$:

5. Ապացուցել, որ $\mathrm{ctg}30^0\mathrm{ctg}70^0+\mathrm{ctg}70^0\mathrm{ctg}80^0+\mathrm{ctg}80^0\mathrm{ctg}30^0=1$:

6. Ապացուցել $\mathrm{tg}3\alpha=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}(60^0-\alpha)\mathrm{tg}(60^0+\alpha)$ նույնությունը: Օգտվելով այդ նույնությունից՝ գտնել թվային արտահայտության արժեքը.

ա) $\mathrm{tg}20^0\mathrm{tg}40^0\mathrm{tg}60^0\mathrm{tg}80^0$; բ) $\mathrm{tg}5^0\mathrm{tg}55^0\mathrm{tg}65^0$:

7. Ապացուցել, որ եթե α-ն և β-ն առաջին քառորդի անկյուններ են, ապա.

ա) $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$, բ) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)>\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta$:

Պատասխաններ, ցուցումներ

1. ա) $-\dfrac{1}{2}$, բ) 1:

3. ***Ցուցում:***

$$\alpha+\beta=\pi-\gamma \Rightarrow \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}(\pi-\gamma) \Rightarrow \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}=-\mathrm{tg}\gamma \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma:$$

4. ***Ցուցում:***

Ունենք՝ $10^0+25^0+55^0=90^0 \Rightarrow 10^0+25^0=90^0-55^0 \Rightarrow \mathrm{tg}(10^0+25^0)=$

$$\mathrm{tg}(90^0-55^0) \Rightarrow \frac{\mathrm{tg}10^0+\mathrm{tg}25^0}{1-\mathrm{tg}10^0\cdot\ \mathrm{tg}25^0}=\frac{1}{\mathrm{tg}55^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}10^0\cdot\mathrm{tg}55^0+\mathrm{tg}25^0\cdot\mathrm{tg}55^0+\mathrm{tg}10^0\cdot\mathrm{tg}25^0=1:$$