ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 7. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Օրինակ 3: Հայտնի է, որ $\operatorname{ctg}\alpha = -3,\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$: Գտնենք մյուս երեք հիմնական եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Լուծում: Ամենից առաջ գտնենք $\operatorname{tg}\alpha$ -ն՝ օգտվելով $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ նույնությունից. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$: Այնուհետև $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ բանաձևից կգտնենք $\cos\alpha$ -ն՝

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+(-3)^2} = 0{,}1 :$$

Քանի որ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, ուստի $\cos\alpha > 0$, հետևաբար, $\cos\alpha = \sqrt{0{,}1}$:

Մյուս կողմից ունենք՝ $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = (-3)\cdot\sqrt{0{,}1} = -3\sqrt{0{,}1}$:

Օրինակ 4: Հայտնի է, որ $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$: Գտնենք $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ արտահայտության արժեքը:

Լուծում: Օգտվելով $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2$ նույնությունից, կարող ենք գրել՝

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 :$$

$\sin\alpha\cos\alpha$ արտադրյալը որոշելու համար տրված հավասարության երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի՝

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{4},$$

որտեղից՝

$$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{8}:$$

Այսպիսով՝ $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}:$

Օրինակ 5: Ապացուցենք, որ ցանկացած $x \neq \frac{\pi n}{2}$ $(n \in Z)$ արժեքների դեպքում ճիշտ է $|\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x| \geq 2$ անհավասարությունը:

Լուծում: Նշանակենք՝ $\mathrm{tg}x = y$, այդ դեպքում $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{y}$: Անհրաժեշտ է ապացուցել $\left|y + \frac{1}{y}\right| \geq 2$ անհավասարությունը $(y \in R,\ y \neq 0)$: Ունենք՝

$$\left|y + \frac{1}{y}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2 + \frac{1}{y^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \geq 0 \qquad :$$

Քանի որ վերջին անհավասարությունն ակնհայտ ճշմարիտ անհավասարություն է, ուստի ճշմարիտ է նաև տրված անհավասարությունը:

Օրինակ 6: Գտնենք $\frac{\cos\alpha}{3\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$ արտահայտության արժեքը, եթե $\mathrm{tg}\alpha = 2:$

Լուծում:

$$\frac{\cos\alpha}{3\sin^3\alpha + \cos^3\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{3\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{3tg^3\alpha + 1} = \frac{1 + tg^2\alpha}{3tg^3\alpha + 1} = \frac{1 + 2^2}{3 \cdot 2^3 + 1} = \frac{1}{5}:$$

Օրինակ 7: Հայտնի է, որ $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}5$: Գտնենք արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; բ) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$; գ) $tg^3\alpha + ctg^3\alpha$:

Լուծում: Տրված հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի՝ կստանանք.

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{4}:$$

Քանի որ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ուստի կունենանք $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ -ի արժեքը՝

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{3}{8}:$$

բ) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=1:\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{8}{3}$ ։

գ) Օգտվելով $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ նույնությունից՝ կարող ենք գրել.

$$\mathrm{tg}^3\alpha+\mathrm{ctg}^3\alpha=(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^3-3\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)=$$
$$=\left(-\frac{8}{3}\right)^3-3\cdot1\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{296}{27}\text{ ։}$$