

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՅՈՒՆԵՐ

§ 7. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶՓԱԿԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ



Առաջադրանքներ

1. Պարզեցնել արտահայտությունը*.

ա) $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi (\cos^2 \varphi + 1)$; բ) $\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$:

գ) $\frac{1}{\cos^2 x \cos^2 y} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 y} - \operatorname{tg}^2 y$; դ) $\sqrt{\sin^2 \varphi (1 + \operatorname{ctg} \varphi) + \cos^2 \varphi (1 + \operatorname{tg} \varphi)}$:

2. Դիցուք՝ $\sin x \cos x = \frac{2}{5}$: Գտնել $\left| \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right|$ արտահայտության արժեքը:

3. Դիցուք՝ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin x}{5 \sin x - 2 \cos x}$, բ) $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$:

Ապացուցել նույնությունը (4–9).

4. ա) $\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$;

բ) $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2 = 1$:

5. ա) $\frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2 \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1$; բ) $\frac{(\cos x + \sin x)^2 - 1}{\operatorname{ctg} x - \sin x \cos x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$;

* «Պարզեցնել արտահայտությունը» այսպիսի նշանակում է կատարել զույր ձևական ձևափոխություններ: Սրացված արտահայտությունը կարող է որոշված լինել այնպիսի բազմության վրա, որն ընդգրկում է սկզբում փրված արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը: Սակայն այդ բազմությունները գրնել չի պահանջվում, եթե այդ մասին հարուկ չի ասված: Պարզեցումը համարվում է ավարտված, եթե արդյունքում սրացվում է հնարավոր ամենապարզ տեսքի արտահայտությունը, այնպիսին, որ հնարավոր չլինեն հետագա պարզեցումներ:

$$զ) \frac{\cos^3 t + \sin^3 t}{1 - \sin t \cos t} = \cos t + \sin t :$$

6. ա) $\sin^4 t + \cos^4 t = 1 - 2 \sin^2 t \cos^2 t ;$

բ) $\sin^6 t + \cos^6 t = 1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t ;$

գ) $3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1 :$

7. ա) $\sqrt{\frac{1 - \cos p}{1 + \cos p}} = \frac{|\sin p|}{1 + \cos p} ;$ բ) $\sqrt{\frac{1 - \sin p}{1 + \sin p}} = \frac{|\cos p|}{1 + \sin p} :$

8. $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = -2 \operatorname{tg} \alpha$, եթե $90^\circ < \alpha < 180^\circ :$

9. $\frac{\sqrt{1 - 2 \sin t \cos t}}{\sin^2 t - \cos^2 t} + \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t + \cos t} = \sin t + \cos t$, եթե $\sin t > \cos t :$

10*. Ապացուցել, որ եթե որոշ α, β, γ անկյունների համար տեղի ունի

$$(1 - \sin \alpha)(1 - \sin \beta)(1 - \sin \gamma) = (1 + \sin \alpha)(1 + \sin \beta)(1 + \sin \gamma)$$

հավասարությունը, ապա այդ հավասարության յուրաքանչյուր մասը հավասար է $|\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma| :$

11. Հայտնի է, որ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1 :$ Ապացուցել, որ $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta < 1 :$

12. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2$, եթե $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} ;$

բ) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha > \sin \alpha + \cos \alpha$, եթե $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} ;$

գ) $|\sin t + \cos t| \leq \sqrt{2} ;$

դ) $|\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha| > |\sin \alpha| + |\cos \alpha| :$

13*. Գտնել $f(x) = \sin^k x + \cos^k x$ ($k \in \mathbb{N}$) ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

ՊԱՏԱՍԻՆՆԵՐ

1. դ) $|\sin y + \cos y|$: 2. 3: 3. ա) 4,8, բ) $\frac{17}{13}$: 13. Եթե $n=1$, ապա $\max f(x) = \sqrt{2}$, $\min f(x) = -\sqrt{2}$: Եթե $n=2$, ապա $\max f(x) = \min f(x) = 1$: Եթե $n > 2$ և կենտ թիվ է, ապա $\max f(x) = 1$, $\min f(x) = -1$: Եթե $n > 2$ և զույգ թիվ է, ապա $\max f(x) = 1$, $\min f(x) = 2^{1-\frac{n}{2}}$: