ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 6. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ

Օրինակ 1: Գտնենք $\cos 3x$ ֆունկցիայի նշանի պահպանման միջակայքները և զրոները[1]:

Լուծում: Ընդունենք՝ $3x=t$: $\cos t$ ֆունկցիան դրական է I և IV քառորդներում, այսինքն՝ $t\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ դեպքում ($n\in Z$), և բացասական է II և III քառորդներում, այսինքն՝ $t\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ դեպքում ($n\in Z$): Այսպիսով.

$$\cos 3x>0, \text{ թե } -\frac{\pi}{2}+2\pi n<3x<\frac{\pi}{2}+2\pi n, \text{ որտեղից կստանանք՝}$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right),\quad n\in Z:$$

$$\cos 3x<0, \text{ թե } \frac{\pi}{2}+2\pi n<3x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n, \text{ այստեղից՝}$$

$$x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\right),\quad n\in Z:$$

$\cos t=0$ հավասարման արմատներն են՝ $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$: Նշանակում է՝ $3x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ հավասարությունից կունենանք տրված ֆունկցիայի զրոները՝ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ $(k\in Z)$:

[1] *Հիշենք, որ x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է զրո արժեք, անվանում են f ֆունկցիայի* ***զրոներ:***

Օրինակ 2: Գտնենք $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքները:

Լուծում: Հայտնի է, որ սինուսի աճման միջակայքերն են՝ $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$, հատվածները, նվազման միջակայքները՝ $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$, հատվածները: Հետևաբար, տրված ֆունկցիայի աճման միջակայքերը գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել հետևյալ կրկնակի անհավասարումը՝

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

որտեղից կստանանք՝ $-\frac{\pi}{12}+\pi n\le x\le\frac{5\pi}{12}+\pi n$ $(n\in Z)$:

Նվազման միջակայքերը գտնելու համար լուծենք

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2\pi n$$

կրկնակի անհավասարումը: Այդ անհավասարումից ստանում ենք՝

$$\frac{5\pi}{12}+\pi n\le x\le\frac{11\pi}{12}+\pi n\ (n\in Z):$$

Այսպիսով, տրված ֆունկցիան աճում է $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{5\pi}{12}+\pi n\right]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում և նվազում՝ $\left[\frac{5\pi}{12}+\pi n; \frac{11\pi}{12}+\pi n\right]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում, որտեղ $n\in Z$:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ եթե $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<\frac{\pi}{2}$, ապա

$$\mathrm{tg}x_1<\frac{\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_n}<\mathrm{tg}x_n:$$

Լուծում: Քանի որ $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում սինուս ֆունկցիան աճող է, իսկ կոսինուս ֆունկցիան՝ նվազող, հետևաբար կարող ենք գրել՝

$$0<\sin x_1<\sin x_2<\ldots<\sin x_n,$$

$$\cos x_1>\cos x_2>\ldots>\cos x_n>0:$$

Նշանակում է՝

$$n\sin x_1 < \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n < n\sin x_n ,$$
$$n\cos x_1 > \cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n > n\cos x_n$$

Հետևաբար,

$$\frac{n\sin x_1}{n\cos x_1} < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n} < \frac{n\sin x_n}{n\cos x_n} ,$$

այսինքն՝ $\mathrm{tg} x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n} < \mathrm{tg} x_n$, որն էլ պահանջվում էր ապացուցել: