## ԳԼՈՒԽ 4

# ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

## § 5. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

### Առաջադրանքներ

Ապացուցել, որ $f$ ֆունկցիան պարբերական չէ (1–4).

**1.** ա) $f(x)=\cos\sqrt{x}$ ; բ) $f(x)=\sin|x|$:

**2.** ա) $f(x)=\sin x^2$; բ) $f(x)=\cos x^3$:

**3.** ա) $f(x)=\cos x\cos(\sqrt{2}x)$; բ) $f(x)=\cos x+\cos(\pi x)$

**4.** ա) $f(x)=x\sin x$; բ) $f(x)=\{x\}+\sin x$:

### ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

**1.** ***Լուծում:*** ա) Ենթադրենք հակառակը՝ $f$ ֆունկցիան պարբերական է՝ $T>0$ պարբերությամբ: Այդ դեպքում նրա որոշման տիրույթի ցանկացած x–ի դեպքում $x-T$ թիվը նույնպես պետք է պատկանի որոշման տիրույթին: Սակայն $x=0$ դեպքում ստացվող $-T$ բացասական թիվը չի պատկանում $[0;\infty)$ միջակայքին: Ստացված հակասությունը հիմնավորում է, որ $f$ ֆունկցիան պարբերական չէ:

բ) Ենթադրենք հակառակը՝ $f$ ֆունկցիան պարբերական է և $T$–ն նրա որևէ դրական պարբերություն է: Այդ դեպքում $\sin|x+T|=\sin|x|$ հավասարությունը $R$–ում կլինի նույնություն: Մասնավորաբար, $x=0$ արժեքի դեպքում կստանանք ճիշտ հավասարություն՝ $\sin T=0$, որտեղից $T=\pi k\ \ (k\in N)$: Ստացվում է, որ $T$–ն կարող է միայն $\pi,\ \ 2\pi,\ \ 3\pi$... թվերից մեկը լինել: Ընդունենք՝ $T=\pi q$, որտեղ $q$–ն որոշակի բնական թիվ է: Այդ դեպքում $\sin|x+\pi q|=\sin|x|$ հավասարությունը նույնություն է: Եթե $q$–ն լինի զույգ թիվ, ապա տեղադրելով, օրինակ, $x=-\frac{\pi}{2}$, կստանանք՝

$$\sin\left|-\frac{\pi}{2}+\pi q\right|=\sin\left|-\frac{\pi}{2}\right| \Leftrightarrow \sin(-\frac{\pi}{2}+\pi q)=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow -1=1:$$

Ստացված սխալ հավասարությունը ցույց է տալիս, որ $q$-ն չի կարող լինել զույգ թիվ:

Եթե $q$-ն լինի կենտ թիվ, ապա տեղադրելով, օրինակ, $x=\frac{\pi}{4}$, կունենանք՝

$$\sin\left|\frac{\pi}{4}+\pi q\right|=\sin\left|\frac{\pi}{4}\right| \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{4}+\pi q)=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}:$$

Ստացված սխալ հավասարությունն էլ ցույց է տալիս, որ $q$-ն չի կարող լինել կենտ թիվ:

Այսպիսով, հանգում ենք հակասության, որով և ապացուցվում է բերված պնդումը:

**2.** ա) ***Լուծում:*** Ենթադրենք հակառակը՝ $f$ ֆունկցիան պարբերական է $T>0$ պարբերությամբ: Այդ դեպքում հետևյալ հավասարությունը R-ում նույնություն է.

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2: \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+T)^2=x^2+2\pi k \\ (x+T)^2=-x^2+(2k+1)\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2xT=-T^2+2\pi k \\ 2x^2+2Tx-(2k+1)\pi=0, \quad k\in Z: \end{array}\right.$$

Ակնհայտ է, որ ֆիքսված $T$ թվի և կամայական $k$ ամբողջ թվի դեպքում առաջին հավասարումն ունի մեկ արմատ, իսկ երկրորդը՝ ամենաշատը երկու արմատ: Մինչդեռ, $x$-ի ցանկացած արժեք պետք է դառնար այդ համախմբի լուծում: Ստացված հակասությունը հաստատում է խնդրի պնդման ճիշտ լինելը:

**3.** ***Ցուցում:*** ա) Ենթադրենք հակառակը՝ $f$ ֆունկցիան պարբերական է $T>0$ պարբերությամբ: Այդ դեպքում ցանկացած $x\in R$ դեպքում ճիշտ է

$$f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow \cos(x+T)\cos((x+T)\sqrt{2})=\cos x\cos(\sqrt{2}x)$$

հավասարությունը: Մասնավորաբար, $x=0$ դեպքում կունենանք՝ $\cos T\cdot\cos(\sqrt{2}T)=1$: Ակնհայտ է, որ այս հավասարումը ($T$-ն անհայտ մեծություն է) համարժեք է հետևյալ համակարգերի համախմբին.

$$\begin{cases} \cos T=1 \\ \cos(\sqrt{2}T)=1; \end{cases} \begin{cases} \cos T=-1 \\ \cos(\sqrt{2}T)=-1: \end{cases}$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$\begin{cases} T=2\pi k \\ T=\sqrt{2}\pi m \end{cases} \text{կամ} \begin{cases} T=(2k+1)\pi \\ \sqrt{2}T=(2m+1)\pi \end{cases} \quad (k,\ m\in N):$$

Այդ համակարգերից, համապատասխանաբար, հետևում են՝ $\sqrt{2}=\frac{m}{k}$ կամ $\sqrt{2}=\frac{2m+1}{2k+1}$, որոնցից և ոչ մեկը չի կարող տեղի ունենալ, քանի որ $\sqrt{2}$ թիվն իռացիոնալ է, իսկ նրանց աջ մասերում գտնվող թվերը ռացիոնալ են: Ստացված հակասությունը հաստատում է խնդրի պնդման ճիշտ լինելը:

բ) ***Լուծում:*** Ապացուցենք՝ հակասող ենթադրությամբ: Դիցուք՝ $f$-ը $T>0$ պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow \cos(x+T)+\cos(\pi(x+T))=\cos x+\cos(\pi x):$$

Տեղադրելով՝ $x=0$, կստանանք՝

$$\cos T+\cos(\pi T)=2\Leftrightarrow \begin{cases}\cos T=1\\ \cos(\pi T)=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}T=2\pi k, & k\in N\\ T=2m, & m\in N\end{cases}:$$

$2\pi k=2m$ հավասարությունից կստանանք՝ $\pi=\frac{m}{k}$, որն էլ սխալ հավասարություն է, քանի որ $\pi$-ն իռացիոնալ թիվ է, իսկ $\frac{m}{k}$-ը՝ ռացիոնալ: Այս հակասությունը հիմնավորում է բերված պնդման ճիշտ լինելը:

**4.** բ) ***Լուծում:*** Ենթադրենք՝ $f$ ֆունկցիան պարբերական է և $T$-ն նրա որևէ դրական պարբերություն է: Այդ դեպքում

$$\{x+T\}+\sin(x+T)=\{x\}+\sin x$$

հավասարությունը $R$-ում նույնություն կլինի: Վերցնելով, մասնավորաբար, $x=0$ և $x=-T$, կունենանք՝

$$\begin{cases}\{T\}+\sin T=0\\ \{-T\}-\sin T=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\{T\}+\{-T\}=0\\ \{T\}+\sin T=0:\end{cases}$$

Վերջին համակարգի առաջին հավասարությունից հետևում է, որ $\{T\}=\{-T\}=0$, ուստի $T$-ն բնական թիվ է: Այդ դեպքում մյուս հավասարությունից հետևում է, որ $\sin T=0$, այսինքն՝ $T=\pi n,\quad n\in N$: Վերջին հավասարությունը չի կարող ճիշտ լինել, քանի որ $T$-ն բնական թիվ է, իսկ $\pi n$-ը՝ իռացիոնալ թիվ: Ստացվեց հակասություն, որով էլ ավարտվում է խնդրի լուծումը: