ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Դիտարկենք պարբերական ֆունկցիաների վերաբերյալ մի քանի կարևոր փաստեր:

Թեորեմ 1: ***Եթե T_1-ը և T_2-ը f ֆունկցիայի պարբերություն են, ապա (T_1+T_2)-ը նույնպես այդ ֆունկցիայի պարբերություն է:***

Ապացուցում: Քանի որ T_1-ը f-ի պարբերություն է, ուստի $D(f)$-ի ցանկացած x-ի դեպքում $x+T_1$ և $x-T_1$ թվերը նույնպես պատկանում են $D(f)$-ին: Մյուս կողմից, քանի որ T_2-ը f ֆունկցիայի պարբերություն է, հետևաբար $(x+T_1)+T_2=x+(T_1+T_2)$ և $(x-T_1)-T_2=x-(T_1+T_2)$ թվերը ևս պատկանում են $D(f)$-ին: Այդ նկատառումների համաձայն կարող ենք գրել.

$$f\left(x+\left(T_1+T_2\right)\right)=f\left(\left(x+T_1\right)+T_2\right)=f\left(x+T_1\right)=f(x):$$

Հետևաբար, սահմանման համաձայն, (T_1+T_2)-ը f ֆունկցիայի պարբերություն է:

Թեորեմ 2: ***Եթե T-ն f ֆունկցիայի որևէ պարբերություն է, ապա ցանկացած ամբողջ $n\neq 0$ դեպքում nT թիվը նույնպես պարբերություն է:***

Ապացուցում: Թեորեմ 1-ից հետևում է, որ

$$T+T=2T,\quad 3T+T=3T,\quad 3T+T=4T,\quad \ldots,\quad (n-1)T+T=nT$$

թվերը նույնպես f-ի պարբերություն են, որտեղ n-ը 1-ից մեծ ցանկացած բնական թիվ է: Այդ պնդումը, առանց դժվարության, կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով (կատարեք ինքնուրույն):

Թեորեմի ապացուցումը բացասական ամբողջ n-երի համար հետևում է այն փաստից, որ եթե T-ն f ֆունկցիայի որևէ պարբերություն է, ապա

$-T$–ն ևս f–ի պարբերություն է:

Ընդունված է ֆունկցիայի ամենափոքր դրական պարբերությունը (եթե այն գոյություն ունի) անվանել ***հիմնական (գլխավոր)*** պարբերություն:

Թեորեմ 3: ***Եթե T–ն f ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է, ապա այդ ֆունկցիայի բոլոր պարբերությունները mT տեսքի են, որտեղ m–ը զրոյից տարբեր ցանկացած ամբողջ թիվ է:***

Ապացուցում: Ապացուցենք հակասող ընդունելության եղանակով: Ենթադրենք, թե գոյություն ունի f ֆունկցիայի այնպիսի T_1 պարբերություն, որը տարբեր է mT տեսքի թվերից $(m \in Z,\ m \neq 0)$: Այդ դեպքում T_1–ը կարելի է ներկայացնել՝ $T_1 = kT + b$ տեսքով, որտեղ $k \in Z,\ 0 < b < T$: Այդպիսի ենթադրությամբ, $D(f)$–ի ցանկացած x–ի համար կունենանք՝

$$f(x) = f(x+T) = f(x+T_1-kT) = f(x+b):$$

Ստացվում է, որ T–ից փոքր դրական b թիվը f ֆունկցիայի պարբերություն է: Իսկ դա հնարավոր չէ, քանի որ T–ն f–ի փոքրագույն դրական պարբերությունն է: Ստացված հակասությունը հիմնավորում է թեորեմի պնդումը:

Նշենք պարբերական ֆունկցիաների մի քանի հատկություն ևս, որոնք օգտակար կլինեն շատ խնդիրներ լուծելիս:

1) R–ում որոշված ցանկացած հաստատուն ֆունկցիայի համար յուրաքանչյուր $T \neq 0$ թիվ պարբերություն է: Ակնհայտ է, որ այդպիսի ֆունկցիան չի կարող ունենալ հիմնական պարբերություն (ինչո՞ւ):

2) Պարբերական ֆունկցիան իր յուրաքանչյուր արժեքն ընդունում է արգումենտի անվերջ շատ արժեքների դեպքում, որոնց մեջ կան մոդուլով որքան հնարավոր է մեծ և՛ դրական, և՛ բացասական արժեքներ:

3) Պարբերական f ֆունկցիան $D(f)$ բազմության վրա չի կարող լինել մոնոտոն (աճող կամ նվազող):

4) Եթե T պարբերությամբ պարբերական f ֆունկցիան որևէ $[a;\ a+T]$ միջակայքում բավարարում է $|f(x)| \leq b$ պայմանին, որտեղ b–ն մի որոշ թիվ է, ապա $D(f)$–ի ցանկացած x–ի դեպքում $|f(x)| \leq b$:

5) Եթե T պարբերությամբ պարբերական f ֆունկցիան որոշված չէ x_0 կետում, ապա այն որոշված չէ նաև բոլոր $x_0 \pm nT$ կետերում, որտեղ $n \in N$: Հետևաբար, ցանկացած ֆունկցիա, որը որոշված է թվային ուղղի բոլոր կետերում, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի, պարբերական չէ:

6) Եթե ֆունկցիան որոշված է միայն ճառագայթի վրա, ապա այն պարբերական չէ:

7) T հիմնական պարբերությամբ f ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցե–

յու համար բավական է կառուցումը կատարել T երկարությամբ որևէ $[a; a+T]$ միջակայքի վրա և ապա ստացված կորն աբսցիսների առանցքին զուգահեռ տեղափոխել դեպի աջ և դեպի ձախ՝ nT հեռավորությամբ, որտեղ n-ը ցանկացած բնական թիվ է:

Վերոհիշյալ բոլոր պնդումները հետևում են ֆունկցիայի պարբերության սահմանումից: Այդ պնդումների ապացուցումները կատարեք ինքնուրույն:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ $\{x\}$ ֆունկցիան (x-ի կոտորակային մասը) պարբերական է և գտնենք նրա հիմնական պարբերությունը:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ x իրական թվին ավելացնելով որևէ ամբողջ թիվ, x-ի կոտորակային մասը չի փոխվի: Դրա համար էլ զրոյից տարբեր ցանկացած ամբողջ թիվ $\{x\}$ ֆունկցիայի պարբերություն է: Դրական ամբողջ թվերից ամենափոքրը 1-ն է: Ապացուցենք, որ 1 թիվը $\{x\}$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է: Բավական է ցույց տալ, որ 1-ից փոքր ոչ մի T դրական թիվ չի կարող լինել պարբերություն: Ունենք՝ $\{0\}=0$, իսկ $0<T<1$ ենթադրությամբ՝ $\{T\}=T\neq 0$, նշանակում է, որ $\{x\}=\{x+T\}$ հավասարությունը $x=0$ դեպքում տեղի չունի, որն էլ ասում է, որ այդպիսի T թիվը չի կարող լինել դիտարկվող ֆունկցիայի պարբերություն: Հետևաբար, $\{x\}$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը 1-ն է:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ եթե $f_1(x)$ և $f_2(x)$ պարբերական ֆունկցիաներն ունեն համաչափելի T_1 և T_2 պարբերություններ, ապա նրանք ունեն ընդհանուր պարբերություն:

Լուծում: Քանի որ T_1-ը և T_2-ը համաչափելի են, ուստի գոյություն ունեն բնական m և n թվեր այնպես, որ $mT_1=nT_2=T$: Մյուս կողմից, ըստ թեորեմ 2-ի, mT_1-ը f_1 ֆունկցիայի պարբերություն է, իսկ nT_2-ը՝ f_2-ի: Նշանակում է՝ T-ն ընդհանուր պարբերություն է:

Հարցեր

1. Ո՞ր դեպքում են ասում, որ f ֆունկցիան պարբերական է:
2. Ինչն են անվանում պարբերական ֆունկցիայի հիմնական պարբերություն:
3. Նշել պարբերական ֆունկցիաների օրինակներ և յուրաքանչյուր դեպքում շեշտել հիմնական պարբերությունը:

Առաջադրանքներ

1. Ապացուցել, որ T պարբերությամբ երկու պարբերական ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը և քանորդը նույնպես պարբերական ֆունկցիաներ են T պարբերությամբ:
2. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան պարբերական է T պարբերությամբ և $D(g)\supset E(f)$, ապա $g\circ f$ ֆունկցիան նույնպես պարբերական է և ունի նույն պարբերությունը:
3. Ապացուցել թեորեմ 1-ը, թեորեմ 2-ը և թեորեմ 3-ը:
4. Ապացուցել եռանկյունաչափական ֆունկցիաների պարբերականությունների վերաբերյալ հատկությունները (տես 20 ենթակետը):
5. Ապացուցել եռանկյունաչափական ֆունկցիաների զույգության և կենտության վերաբերյալ հատկությունները (տես 30 ենթակետը):
6. Ապացուցել, որ եթե $\frac{7}{3}$ և $\frac{4}{5}$ թվերը f ֆունկցիայի պարբերություններից են, ապա $\frac{1}{15}$-ը ևս f-ի պարբերրություն է:
7. Ապացուցել, որ f ֆունկցիան պարբերական է.

   ա) $f(x)=\left\{\frac{x+3}{5}\right\}$; բ) $f(x)=\left\{\frac{x}{4}\right\}+\left\{\frac{x}{5}\right\}$; գ) $f(x)=\sqrt{\{6x\}-\{x\}+4}$:
8. Գտնել ֆունկցիայի ամենափոքր դրական պարբերությունը.

$$y=\{3{,}1-5x\}:$$

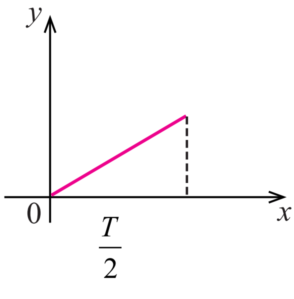
9. Ապացուցել, որ f ֆունկցիան պարբերական չէ.

   ա) $f(x)=x^5-4x^3+1$; բ)* $f(x)=\{x^2\}$; գ)* $f(x)=\{x\}+\{x\sqrt{2}\}$:
10. Կարո՞ղ է արդյոք պարբերական ֆունկցիան աճել ամբողջ թվային ուղղի վրա:
11. Ճի՞շտ է, արդյոք, հետևյալ պնդումը.

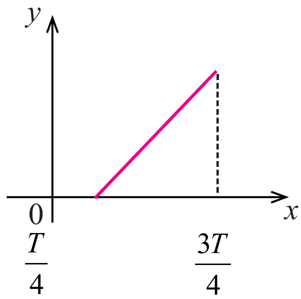
    ա) Երկու պարբերական ֆունկցիաների գումարը պարբերական ֆունկցիա է,

    բ) երկու ոչ պարբերական ֆունկցիաների գումարը ոչ պարբերական ֆունկցիա է:
12. 65–67-րդ նկարներից յուրաքանչյուրում պատկերված է ամբողջ թվային ուղղի վրա որոշված պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկի մի

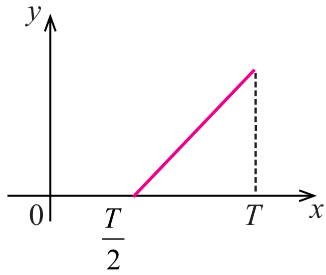
մասը: Ո՞ր թիվը կարող է լինել տվյալ ֆունկցիայի պարբերություն (նշել պարբերության բոլոր հնարավոր արժեքները):



Նկ. 65

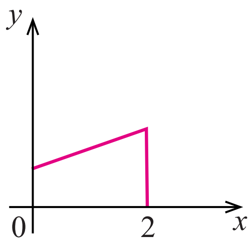


Նկ. 66

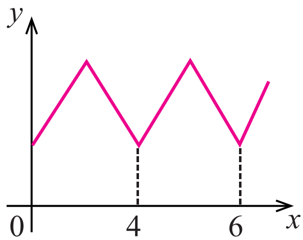


Նկ. 67

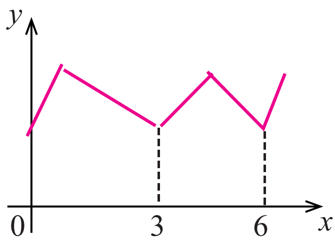
13. 68–70-րդ նկարներում պատկերված ֆունկցիաների գրաֆիկները շարունակել (եթե այդ հնարավոր է) մինչև T փոքրագույն դրական պարբերություն ունեցող պարբերական ֆունկցիաների գրաֆիկները, երբ ֆունկցիաները՝ ա) զույգ են, բ) կենտ են:



Նկ. 68



Նկ. 69



Նկ. 70

14. Գոյություն ունե՞ն արդյոք այնպիսի պարբերական ֆունկցիաներ, որոնց համար.

ա) բոլոր ռացիոնալ թվերը պարբերություններ են, բայց ոչ մի իռացիոնալ թիվ պարբերություն չէ,

բ) բոլոր իռացիոնալ թվերը պարբերություններ են, բայց ոչ մի ռացիոնալ թիվ պարբերություն չէ,

գ) զրոյից տարբեր ցանկացած իրական թիվ պարբերություն է:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

8. $\frac{1}{5}$: **10.** Ո՛չ: **11.** ա) Ո՛չ, բ) ո՛չ: