ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

3. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

Հավասարումն անվանում են ***եռանկյունաչափական***, եթե նրանում անհայտ մեծությունը մտնում է միայն եռանկյունաչափական ֆունկցիայի նշանի տակ: Եռանկյունաչափական հավասարումների լուծումը, հիմնականում, այս կամ այն ձևափոխությունների միջոցով հանգեցվում է մեկ կամ մի քանի պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումների լուծմանը:

Դուք արդեն ծանոթ եք մեկ փոփոխականով հավասարումների ընդհանուր հասկացությանը, հավասարումների համարժեքությանը, ինչպես նաև դրա վերաբերյալ թեորեմներին: Ձեզ հայտնի են նաև ռացիոնալ (հանրահաշվական) հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդները:

Եռանկյունաչափական հավասարումները լուծելու համար կիրառվում են այն հիմնական հնարները, որոնք կիրառվել են հանրահաշվական հավասարումները լուծելիս՝ բազմապատկիչների վերլուծում (որն իրագործվում է $f(x)=0$ տեսքի հավասարման ձախ մասի համար) և նոր անհայտի ներմուծում (փոփոխականի փոխարինում):

Եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման հաջողությունը կախված է եռանկյունաչափական ֆունկցիայի հատկություններն արտահայտող բանաձևերի իմացությունից և, իհարկե, խնդիրների լուծման հմտությունից ու կարողությունից:

Յուրաքանչյուր կոնկրետ հավասարման համար կարող են գոյություն ունենալ լուծման տարբեր եղանակներ:

Բազմաբնույթ օրինակների վրա լուսաբանենք վերը նշված ընդհանուր մեթոդների կիրառությունները՝ դրանք քննարկելով առանձին-առանձին:

Միաժամանակ, դիտարկվելու են մասնակի եղանակներ՝ եռանկյունաչափական որոշ տիպի հավասարումների լուծման համար:

Մինչև բուն նյութին անցնելը՝ ի մի բերված և համարակալված ներկայացնենք նախորդ պարագրաֆներում ուսումնասիրված եռանկյունաչափական հիմնական բանաձևերը, որոնք հաճախ են հիշատակվելու եռանկյունաչափական հավասարումները լուծելիս:

1. Եռանկյունաչափության հիմնական բանաձևերը

Եռանկյունաչափական հավասարումներ լուծելիս հաճախ են օգտվում ստորև բերված եռանկյունաչափական բանաձևերից:

1) Եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1: \qquad (1)$$

2) Նույն արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների կապն արտահայտող բանաձևերը.

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=1,$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}:$$

3) Գումարման բանաձևերը.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(II)}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(III)}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \qquad \text{(IV)}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(V)}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad \text{(VI)}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad \text{(VII)}$$

4) Բերման բանաձևերը (այստեղ բերվում են առավել գործածվող բանաձևերը).

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\alpha, \qquad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\alpha, \qquad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\sin(\pi-\alpha)\sin\alpha, \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha, \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha:$$

Բերման բանաձևերից ցանկացածը կարելի է հեշտությամբ հիշել՝ օգտվելով մտապահման հետևյալ պարզ կանոնից.

ա) Եթե բերված ֆունկցիայի արգումենտը հավասար է $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ կամ $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$, ապա սինուսը փոխվում է կոսինուսի, կոսինուսը՝ սինուսի, տանգենսը՝ կոտանգենսի, կոտանգենսը՝ տանգենսի, իսկ եթե բերված ֆունկցիայի արգումենտը հավասար է $\pi\pm\alpha$, ապա ֆունկցիայի անունը չի փոխվում,

բ) ստացվող՝ α արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիայի (հավասարության աջ մասի) առաջ դրվում է այն նշանը, որն ունի բերված ֆունկցիան $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ պայմանի դեպքում:

Դիտողություն: *Բերման բանաձևերը չհիշելու կամ նշված կանոնը չմպաքերելու դեպքում կարելի է ուզած բերման բանաձևն անմիջապես արտածել՝ սինուսի և կոսինուսի դեպքում օգտվելով համապատասխան գումարման բանաձևերից ((II) – (V)), իսկ տանգենսի և կոտանգենսի դեպքում՝ համապատասխան ֆունկցիայի սահմանումից:*

5) Կրկնակի և եռակի արգումենտի բանաձևերը.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{(VIII)}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad \text{(IX)}$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \quad \text{(X)}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \qquad \text{(XI)}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \qquad \text{(XII)}$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha} \quad \text{(XIII)}$$

6) Աստիճանի իջեցման բանաձևերը՝

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{(XIV)}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{(XV)}$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \quad \text{(XVI)}$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \quad \text{(XVII)}$$

7) Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարի և տարբերության ձևափոխումը արտադրյալի.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{(XVIII)}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{(XIX)}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{(XX)}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{(XXI)}$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \text{(XXII)}$$

$$\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \text{(XXIII)}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad \text{(XXIV)}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad \text{(XXV)}$$

8) Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալի ձևափոխումը գումարի և տարբերության.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2} \quad \text{(XXVI)}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad \text{(XXVII)}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \qquad \text{(XXVIII)}$$

9) α արգումենտի սինուսի, կոսինուսի և կոտանգենսի արտահայտումը $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ *–ով.*

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \text{(XXIX)}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \text{(XXX)}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \text{(XXXI):}$$

2. Հավասարումների լուծում արտադրիչների վերլուծման մեթոդով

Եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման ամենից շատ կիրառելի հնարներից մեկը արտադրիչների վերլուծման եղանակն է: Արտադրիչների վերլուծման արդյունքում տրված հավասարումը հանգեցվում է ավելի պարզ հավասարումների համախմբի: Այն իրագործելու համար նախ և առաջ հավասարումը բերվում է $F(x)=0$ տեսքի հավասարման, այնուհետև $F(x)$–ը ներկայացվում է արտադրիչների արտադրյալի տեսքով:

Օրինակ 1: Լուծենք հավասարումը՝ $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x$:

Լուծում: Հավասարումն արտագրենք այսպես՝

$$(\cos x-\cos 3x)-\sqrt{3}\sin x=0:$$

Օգտվելով (XXI) բանաձևից՝ այն ներկայացնենք այսպես.

$$2\sin 2x\sin x-\sqrt{3}\sin x=0:$$

Ստացված հավասարման ձախ մասը վերլուծենք արտադրիչների՝

$$\sin x(2\sin 2x-\sqrt{3})=0:$$

Այսպիսով, տրված հավասարումը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համախմբին՝

$$\sin x=0, \quad \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}:$$

Համախմբի առաջին հավասարումից կգտնենք՝ $x=\pi k, \quad k\in Z$, իսկ երկրորդ հավասարումից՝ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n, \quad n\in Z$: Ստացված բազմությունների միավորումն էլ տրված հավասարման լուծումների բազմությունն է:

Օրինակ 2: Լուծենք հավասարումը՝ $\mathrm{tg}x-\sin x=1-\mathrm{tg}x\sin x$:

Լուծում: Խմբավորելով հավասարման անդամները, այն ձևափոխենք այսպես.

$$(\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}x\sin x)-(1+\sin x)=0,$$

$$(1+\sin x)\mathrm{tg}x-(1+\sin x)=0,$$

$$(1+\sin x)(\mathrm{tg}x-1)=0:$$

Պարզ է, որ ստացված հավասարումը համարժեք է տրվածին, իսկ վերջին հավասարման յուրաքանչյուր արմատը արմատ է նաև հետևյալ համախմբի համար՝

$$1+\sin x=0, \quad \mathrm{tg}x-1=0:$$

Այլ կերպ՝ $(1+\sin x(\mathrm{tg}x-1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1+\sin x=0,\\ \mathrm{tg}x-1=0:\end{array}\right.$

Հակառակը, սակայն, ճիշտ չէ: Այդ համախմբի առաջին հավասարման $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad (n\in Z)$ արմատների դեպքում $\mathrm{tg}x$ արտահայտությունն իմաստ չունի: Դրա համար էլ x-ի այդ արժեքները սկզբնական հավասարման արմատներ չեն: Երկրորդ հավասարման արմատներն են՝ $x=\frac{\pi}{4}+\pi k \quad k\in Z$, որոնք նաև հավասարման, ուստի նաև՝ $(1+\sin x)(\mathrm{tg}x-1)=0$ սկզբնականի արմատներն են:

Պատասխան՝ $x=\frac{\pi}{4}+\pi k \quad (k\in Z)$:

Արտադրիչների վերլուծման եղանակով կարելի է լուծել

$$\sin(ax+b)=\sin(cx+d),$$

$$\cos(ax+b)=\cos(cx+d),$$

$$\sin(ax+b)=\cos(cx+d)$$

տեսքի հավասարումները, կիրառելով (XIX) և (XXI) բանաձևերը:

Օրինակ 3. Լուծենք հավասարումը՝ $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x$:

Լուծում: Կիրառելով (XXVI) բանաձևը, հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 12x+\sin 6x),$$

որտեղից կունենանք՝

$$\sin 12x+\sin 4x=0:$$

Սինուսների գումարն արտադրյալի ձևափոխելու բանաձևի (XVIII) շնորհիվ կարող ենք գրել՝

$$2\sin 8x\cos 4x=0:$$

Քանի որ $\sin 8x=2\sin 4x\cos 4x$ (VIII բանաձևի շնորհիվ), ուստի վերջին $\sin 8x=0$ հավասարումը համարժեք է հավասարմանը, որից էլ կստանանք՝ $x=\dfrac{\pi k}{8}$, $k\in Z$:

Արտադրիչների վերլուծման եղանակով կարելի է լուծել

$$\sin(ax+b)=\sin(cx+d),$$

$$\cos(ax+b)=\cos(cx+d),$$

$$\sin(ax+b)=\cos(cx+d):$$

տեսքի հավասարումները, կիրառելով (XIX) և (XXI) բանաձևերը:

Օրինակ 4: Լուծենք հավասարումը՝ $\cos\left(5x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$:

Լուծում: Օգտվելով $\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ բերման բանաձևից, հավասարումը ներկայացնենք այսպես՝

$$\cos\left(5x-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=0:$$

Այնուհետև կիրառելով (XXI) բանաձևը, կարող ենք գրել՝

$$-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

որից հետո կստանանք հավասարումների հետևյալ համախումբը՝

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0,\quad \sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

որտեղից՝

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, \; k\in Z:$$

Ստացված երկու բանաձևերով որոշված թվերի բազմությունների միավորումը կազմում է սկզբնական հավասարման լուծումների բազմությունը:

Օրինակ 5: Լուծենք հավասարումը՝ $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$:

Լուծում: Հավասարման ձախ մասի գումարելիները խմբավորենք զույգերով (տվյալ դեպքում այդպիսի ցանկացած խմբավորում կհասցնի նպատակին), այնուհետև օգտվենք (XX) բանաձևից.

$$(\cos x+\cos 2x)+(\cos 3x+\cos 4x)=0,$$

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=0,$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\right)=0,$$

$$4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\cos x=0:$$

Ստացված հավասարումը համարժեք է ելակետային հավասարմանը: Իր հերթին, վերջին հավասարումը համարժեք է հետևյալ համախմբին՝

$$\cos\frac{x}{2}=0; \qquad \cos\frac{5x}{2}=0; \qquad \cos x=0:$$

Առաջին հավասարման արմատներն են՝ $x=\pi+2\pi k, \quad k\in Z$, երկրորդ հավասարման արմատները՝ $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}, \quad n\in Z$, իսկ երրորդ հավասարման արմատները՝ $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, \quad m\in Z$:

Այսպիսով՝ տրված հավասարման լուծումների բազմությունը այդ երեք տեսքերի թվերի բազմությունների միավորումն է:

Այստեղ ուշադրության է արժանի այն փաստը, որ երկրորդ բազմությունը պարունակում է առաջինը: Իրոք, ընտրելով $n=5k+2 \quad (k\in Z)$ տեսքի թվերը, կհամոզվենք դրանում: Այդ նկատառումով էլ հարմար է պատասխանը գրառել այսպես՝

$$x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}; \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi m \quad (n, m\in Z):$$

Այդ երկու բազմություններն արդեն չունեն ընդհանուր տարր (հիմնավորեք այդ փաստը):

Նշենք, որ պատասխանի առաջին գրելաձևը ևս ընդունելի է, սակայն երկրորդ գրելաձևը մաթեմատիկական «կուլտուրայի» տեսանկյունից ավելի կոռեկտ է:

Եռանկյունաչափական շատ հարցեր քննարկելիս, մասնավորաբար, հավասարումներ լուծելիս, անհրաժեշտություն է առաջանում

$$a\sin x + b\cos x \quad (a \neq 0,\, b \neq 0)$$

տեսքի արտահայտությունը ներկայացնելու արտադրյալի տեսքով:

Հայտնի է օժանդակ անկյան ներմուծման եղանակը, ըստ որի՝ նշված արտահայտությունը կարելի է ձևափոխել արտադրյալի հետևյալ բանաձևի միջոցով.

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi), \qquad (1)$$

որտեղ φ-ն

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ և } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (*)$$

պայմաններին բավարարող որևէ թիվ է:

$$a\sin x + b\cos x = c \; (a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0) \qquad (2)$$

տեսքի հավասարումը նպատակահարմար է լուծել՝ ելնելով օժանդակ անկյան ներմուծման (1) բանաձևից, որի շնորհիվ այն համարժեք է

$$\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi) = c,$$

կամ որ նույնն է՝

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

հավասարմանը:

Այս հավասարումը լուծում ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1, \text{ այսինքն՝ } c^2 \leq a^2 + b^2 :$$

Եթե վերջին պայմանը տեղի ունի, ապա (2) հավասարումն ունի հետևյալ լուծումները՝

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, \quad n \in Z,$$

որտեղ φ-ն որոշվում է (*) պայմաններով:

Օրինակ 6: Լուծենք հավասարումը՝ $12\sin x - 5\cos x = 13$:

Լուծում: Օգտվելով (1) նույնությունից հավասարման ձախ մասը ներկայացնենք արտադրյալի տեսքով.

$$\sqrt{12^2+(-5)^2}\sin(x+\varphi)=13:$$

Այստեղից ստանում ենք՝ $\sin(x+\varphi)=1$, ընդ որում՝ φ-ն $\cos\varphi=\frac{5}{13}$ և $\sin\varphi=-\frac{5}{13}$ պայմաններին բավարարող որևէ թիվ է: Կարելի է վերցնել, օրինակ,

$$\varphi=-\arcsin\frac{5}{13}:$$

Լուծելով $\sin(x+\varphi)=1$ հավասարումը, կստանանք պատասխանը՝

$$x=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{5}{12}+2\pi k,\quad k\in Z:$$

Օրինակ 7: Լուծենք հավասարումը՝ $3\cos x+4\sin x=5\sin 5x$:

Լուծում: Ձևափոխենք ձախ մասը՝

$$3\cos x+4\sin x=\sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\varphi)=5\sin(x+\varphi),$$

որտեղ $\varphi=\arcsin\frac{3}{5}$ (կամ՝ $\arccos\frac{4}{5}$): Դրանով իսկ տրված հավասարումը ձևափոխվում է իրեն համարժեք հետևյալ հավասարումներին՝

$$\sin(x+\varphi)=\sin 5x,$$

$$\sin 5x-\sin(x+\varphi)=0,$$

$$2\sin\left(2x-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(3x+\frac{\varphi}{2}\right)=0:$$

Վերջին հավասարումն էլ համարժեք է հավասարումների հետևյալ համախմբին՝

$$\sin\left(2x-\frac{\varphi}{2}\right)=0,\quad \cos\left(3x+\frac{\varphi}{2}\right)=0:$$

Լուծելով ստացված պարզ հավասարումները՝ կստանանք պատասխանը.

$$x=\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi k}{2};\qquad x=-\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\quad k\in Z,$$

որտեղ $\varphi=\arcsin\frac{3}{5}$:

Եռանկյունաչափական որոշ հավասարումներ լուծելիս երբեմն օգտակար դեր են ունենում նաև աստիճանի իջեցման բանաձևերը՝

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}:$$

Այս բանաձևերը հետևում են (I) և (IX) նույնություններից (արտածեք ինքնուրույն):

Օրինակ 8: Լուծենք հավասարումը՝ $\cos^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$:

Լուծում: Օգտվելով աստիճանի իջեցման՝ վերը նշված բանաձևերից և կոսինուսների գումարը արտադրյալի ձևափոխելու բանաձևից, հաջորդաբար կունենանք՝

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2},$$

$$(\cos 2x+\cos 4x)+(\cos 6x+\cos 8x)=0,$$

$$2\cos 3x\cos x+2\cos 7x\cos x=0,$$

$$2\cos x(\cos 3x+\cos 7x)=0,$$

$$4\cos x\cos 5x\cos 2x=0:$$

Հետևաբար, տրված հավասարումը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համախմբին՝

$$\cos x=0;\quad \cos 5x=0;\quad \cos 2x=0:$$

Նկատենք, որ $\cos x=0$ հավասարման բոլոր արմատները պարունակվում են $\cos 5x=0$ հավասարման արմատների բազմության մեջ, այսինքն՝

$$\cos x=0\Rightarrow \cos 5x=0:$$

Իրոք,

$$\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k\quad (k\in Z):$$

Այդ դեպքում՝

$$\cos 5x=\cos 5\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+5\pi k\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=0:$$

Այդ նշանակում է, որ տրված հավասարումը համարժեք է

$$\cos 5x=0;\qquad \cos 2x=0$$

համախմբին: Դժվար չէ համոզվել, որ վերջին երկու հավասարումները չունեն ընդհանուր արմատ:

Պատասխան՝ $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5};\quad \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z:$

Օրինակ 9: Լուծենք $\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x=\frac{1}{2}\cos 6x$ հավասարումը:

Լուծում: Ձևափոխենք ձախ մասի գումարելիներն առանձին-առանձին.

$$\cos 3x\cos^3 x=(\cos 3x\cos x)\cos^2 x=\frac{1}{4}(\cos 4x+\cos 2x)(1+\cos 2x)=$$
$$=\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos^2 2x+\cos 2x\cos 4x):$$

Համանմանորեն, մյուս գումարելիի համար կունենանք՝

$$\sin 3x\sin^3 x=\frac{1}{4}(\cos 2x-\cos 4x-\cos^2 2x+\cos 2x\cos 4x):$$

Որից հետո սկզբնական հավասարումը բերվում է իրեն համարժեք հետևյալ հավասարմանը՝

$$\cos 2x+\cos 2x\cos 4x=\cos 6x:$$

Այժմ անցնենք արտադրիչների վերլուծման «գործընթացին»: Պահպանելով համարժեքությունը՝ հաջորդաբար կունենանք.

$$\cos 2x-\cos 6x+\cos 2x\cos 4x=0,$$
$$2\sin 4x\sin 2x+\cos 2x\cos 4x=0,$$
$$4\sin^2 2x\cos 2x+\cos 2x\cos 4x=0,$$
$$\cos 2x(4\sin^2 2x+\cos 4x)=0:$$

1) $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\quad (k\in Z):$

2) $4\sin^2 2x+\cos 4x=0\Leftrightarrow 2-2\cos 4x+\cos 4x=0\Leftrightarrow \cos 4x=2$, որը, ակնհայտորեն, արմատ չունի:

Պատասխան՝ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\ (k\in Z)$:

3. Եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման տեղադրման (փոփոխականի փոխարինման) եղանակը

Մեկից ավելի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող եռանկյունաչափական հավասարումը լուծելու համար շատ դեպքերում նպատակահարմար է այն բերել միայն մեկ եռանկյունաչափական ֆունկցիա պարունակող հավասարման, այնուհետև կատարել համապատասխան տեղադրումը: Եռանկյունաչափական հավասարման մեջ փոփոխականի փոխարինումը հիմնականում նպատակ ունի տվյալ եռանկյունաչափական հավասարումը բերել հանրահաշվական հավասարման (մասնավորաբար, քառակուսային հավասարման):

Անհրաժեշտ է փոփոխականի փոխարինումն անել առաջին իսկ հնարավորության դեպքում, այնուհետև ստացված նոր անհայտով հավասարումը լուծել մինչև վերջ (ներառյալ արմատների ընտրությունը) և միայն դրանից հետո անդրադառնալ սկզբնական անհայտին:

Պայմանավորվենք՝ $\sin x$-ից և $\cos x$-ից կախված ռացիոնալ արտահայտությունը նշանակել $R(\sin x; \cos x)$, այսինքն՝ այնպիսի արտահայտություն, որն ստացվում է $\sin x$-ից, $\cos x$-ից և հաստատուններից՝ գումարման, հանման, բազմապատկման գործողությունների միջոցով: $R(\sin x; \cos x)$-ն անվանում են նաև ***ռացիոնալ ֆունկցիա*** $\sin x$-ից և $\cos x$-ից:

Դիտարկենք $R(\sin x; \cos x) = 0$ տեսքի որոշ հավասարումներ: Այդ դեպքում հավասարումն անվանում են նաև ***ռացիոնալ հավասարում*** $\sin x$***-ի և*** $\cos x$***-ի նկատմամբ***:

Հետևյալ պարզ նկատառումները կարող են արագ կողմնորոշել՝ նոր փոփոխականի ընտրությունը կատարելիս:

ա) Եթե հավասարման մեջ $\cos x$-ը հանդես է գալիս միայն զույգ ցուցիչներով, ապա ամենուրեք $\cos^2 x$-ը փոխարինելով $(1-\sin^2 x)$-ով, ստացվում է $\sin x$-ի նկատմամբ ռացիոնալ հավասարում, որն էլ $\sin x = y$ տեղադրությամբ բերվում է ռացիոնալ (հանրահաշվական) հավասարման:

բ) Եթե հավասարման մեջ $\sin x$-ը հանդես է գալիս միայն զույգ ցուցիչներով, ապա կարելի է կատարել $\cos x = y$ տեղադրումը՝ նախապես ամենուրեք $\sin^2 x$-ը փոխարինելով $(1-\cos^2 x)$-ով:

գ) Եթե միաժամանակ $\sin x$-ը՝ $(-\sin x)$-ով, իսկ $\cos x$-ը՝ $(-\cos x)$-ով փոխարինելիս $R(\sin x; \cos x)$-ը չի փոխվում (այսինքն՝ եթե $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$), ապա կատարում են $\mathrm{tg} x = y$ տեղադրումը:

Օրինակ 1: Լուծենք հավասարումը՝ $4\cos^3 x - 4\sin^2 x - 3\cos x + 1 = 0$:

Լուծում: Փոխարինելով $\sin^2 x$-ը $(1-\cos^2 x)$-ով, կունենանք $\cos x$-ի նկատմամբ ռացիոնալ հավասարում՝

$$4\cos^3 x + 4\cos^2 x - 3\cos x - 3 = 0:$$

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $\cos x = y$: Կունենանք՝ y-ի նկատմամբ հանրահաշվական հավասարում՝

$$4y^3 + 4y^2 - 3y - 3 = 0:$$

Ձախ մասը վերածենք արտադրիչների՝

$$4y^2(y+1) - 3(y+1) = 0, \ (y+1)(4y^2-3) = 0,$$

որտեղից՝ $y = -1$ կամ $y^2 = \dfrac{3}{4}$:

Անդրադառնալով սկզբնական անհայտին, կունենանք եռանկյունաչափական պարզ հավասարումների հետևյալ համախումբը՝

$$\cos x = -1; \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}:$$

Առաջին հավասարումից կգտնենք՝ $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$:

Երկրորդ հավասարումը լուծելու համար նպատակահարմար է այն ներկայացնել $\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{3}{4}$ տեսքով, որից հետո կունենանք՝

$$\cos 2x = \frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$:

Դիտողություն: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ *հավասարումը լուծելիս մենք օգտվեցինք աստիճանի իջեցման բանաձևից, որի շնորհիվ ստացվում է* $\cos 2x$*-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի հավասարում:*

$\cos^2 x = a \ (0 < a \le 1)$ հավասարումը կարելի է լուծել նաև այսպես՝

$$\cos x = \pm\sqrt{a} \Leftrightarrow a = \pm \arccos\sqrt{a} + \pi k, \quad k \in Z:$$

Մեր օրինակում՝ $\cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$:

$R(\sin x; \cos x) = 0$ տեսքի հավասարումներից առանձնակի հետաքրքրություն են ներկայացնում, այսպես կոչված, համասեռ հավասարումները:

$\sin x$-ի և $\cos x$-ի նկատմամբ ***առաջին աստիճանի համասեռ հավասարում*** կոչվում է

$$a\sin x + b\cos x = 0 \tag{1}$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ a-ն և b-ն զրոյից տարբեր ցանկացած թվեր են:

$\sin x$-ի և $\cos x$-ի նկատմամբ ***երկրորդ աստիճանի համասեռ հավասարում*** կոչվում է

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \tag{2}$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ a, b, c գործակիցները ցանկացած թվեր են, ընդ որում՝ $a \ne 0, \ c \ne 0$:

Ընդհանրապես, $\sin x$-ի և $\cos x$-ի նկատմամբ ***n-րդ աստիճանի համասեռ հավասարում*** կոչվում է

$$\begin{gathered} a_n \sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + a_{n-2}\sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots \\ +a_1 \sin x\cos^{n-1} x + a_0\cos^n x = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

տեսքի հավասարումը[1], որտեղ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ գործակիցները ցանկացած թվեր են, ընդ որում՝ $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$:

Այդ հավասարման ձախ մասի յուրաքանչյուր գումարելիի մեջ $\sin x$-ի և $\cos x$-ի ցուցիչների գումարը հավասար է միևնույն n թվին: n-ը կոչվում է ***համասեռության աստիճան***:

Անցնենք այդպիսի համասեռ հավասարումների լուծման հիմնական եղանակներին:

Դժվար չէ նկատել, որ (1) և (2) հավասարումներից և ոչ մեկին չի բավարարում x-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $\cos x = 0$: Հետևաբար, (1) հավասարման երկու մասերը բաժանելով $\cos x$-ի, իսկ (2)-ինը՝ $\cos^2 x$-ի, կստանանք դրանց համարժեք, համապատասխանաբար,

$$a\mathrm{tg}x + c = 0, \; a\mathrm{tg}^2 x + b\mathrm{tg}x + c = 0$$

հավասարումները, որոնք $\mathrm{tg}x = y$ նշանակումով բերվում են, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների:

Քննարկենք համասեռ հավասարման լուծումը ընդհանուր դեպքում: Ամենից առաջ նկատենք, որ (3) հավասարման արմատների մեջ չկա x-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $\cos x$-ը հավասար լինի 0-ի: Իրոք, ենթադրենք, թե այդ հավասարման որևէ x արմատի համար $\cos x = 0$: Տեղադրելով (3) հավասարման մեջ, կստանանք՝ $a_n \sin^n x = 0$, որտեղից՝ $\sin x = 0$ (քանի որ $a_n \neq 0$): Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ չկա x-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $\cos x$-ը և $\sin x$-ը միաժամանակ հավասարվեն 0-ի (հիշենք, որ ցանկացած x-ի դեպքում $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$):

Համանմանորեն, (3) հավասարման արմատների բազմությունը չի պարունակում x-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $\sin x = 0$:

Այդ դեպքում (3) հավասարման երկու մասերը բաժանելով $\cos^n x$-ի, կստանանք $\mathrm{tg}x = y$-ի նկատմամբ նրան համարժեք հանրահաշվական հավասարում՝

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y + a_0 = 0:$$

Այնուհետև հայտնի կանոնների կիրառմամբ լուծվում է ստացված n-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումը:

Օրինակ 2: Լուծել $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ հավասարումը:

Լուծում: Արգումենտի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $\cos x = 0$, չի կարող լինել այս հավասարման արմատ: Հակառակ դեպքում (եթե տրված

1 $R(\sin x; \cos x)$ ֆունկցիան անվանում են $\sin x$-ի և $\cos x$-ի նկատմամբ n-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա, եթե $R(p\sin t;\, p\cos t) = p^n R(\sin t; \cos t)$ $(p \neq 0)$:

հավասարման որևէ արմատի դեպքում՝ $\cos x=0$) այդ հավասարումից կունենանք նաև՝ $2\sin^2 x=0$ հավասարությունը, այսինքն՝ $\sin x=0$: Ստացվում է հակասություն, քանի որ միևնույն թվի սինուսն ու կոսինուսը միաժամանակ 0–ի հավասար լինել չեն կարող: Հետևաբար, կարող ենք հավասարման երկու մասերը բաժանել $\cos^2 x$–ի (կամ $\sin^2 x$–ի), արդյունքում ստանալով այդ հավասարմանը համարժեք հավասարում՝

$$2\mathrm{tg}^2 x-5\mathrm{tg}x+3=0:$$

Լուծելով այն՝ որպես քառակուսային հավասարում $\mathrm{tg}x$–ի նկատմամբ, կգտնենք՝

$$\mathrm{tg}x=1 \text{ կամ } \mathrm{tg}x=\frac{3}{2},$$

որտեղից կստանանք պատասխանը՝

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z,\quad x=\mathrm{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\quad n\in Z:$$

Երբեմն տրված հավասարումը պարզ ձևափոխությամբ բերվում է համասեռ հավասարման:

Օրինակ 3: Լուծենք $3\sin^2 x+\sin 2x+2\cos^2 x=4$ հավասարումը:

Լուծում: Նկատենք, որ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ և $4=4(\sin^2 x+\cos^2 x)$: Այս նկատառումներով տրված հավասարումը բերվում է երկրորդ աստիճանի համասեռ հավասարման՝

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+2\cos^2 x=0,$$

որը համարժեք է հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրին՝

$$\mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}x+2=0,$$

$$(\mathrm{tg}x-1)^2+1=0:$$

Վերջինը, ակնհայտորեն, արմատ չունի, հետևաբար նաև տրված հավասարումն արմատ չունի:

Օրինակ 4: Լուծենք հավասարումը՝ $2\sin^3 x=\cos x$:

Լուծում: Քանի որ ցանկացած x–ի դեպքում $\cos x=\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)$, ուստի տրված հավասարումը համարժեք է

$$2\sin^3 x-\cos x\sin^2 x-\cos^3 x=0$$

հավասարմանը, որը 3–րդ աստիճանի համասեռ հավասարում է $\sin x$–ի և $\cos x$–ի նկատմամբ: Այդ հավասարման երկու մասերը բաժանելով $\cos^3 x$–ի վրա (որով կստանանք համարժեք հավասարում), այնուհետև նշանակելով՝ $\mathrm{tg}x=z$, կստանանք հետևյալ հանրահաշվական հավասարումը՝

$$2z^3 - z^2 - 1 = 0:$$

Նկատենք, որ $z = 1$-ը այս հավասարման արմատ է: Նշանակում է՝ հավասարման ձախ մասի բազմանդամը բաժանվում է $(z-1)$-ի (հիշենք Բեզուի թեորեմը և նրա հետևանքները): Ձախ մասը վերածելով բազմապատկիչների, կստանանք՝

$$(z-1)(2z^2 + z + 1) = 0:$$

Քանի որ $2z^2 + z + 1 = 0$ հավասարումն արմատ չունի, ուստի $z = 1$-ը միակ արմատն է: Այսպիսով՝ $\mathrm{tg}x = 1$, որտեղից՝ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z:$

Պատասխան՝ $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \,/\, k \in Z \right\}:$

Եթե հավասարումը պարունակում է միայն $\sin x + \cos x$ (կամ $\sin x - \cos x$) արտահայտությունը և $\sin 2x$ ֆունկցիան (կամ՝ $\sin x \cos x$ արտադրյալը), ապա $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$ (կամ $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$) նույնության շնորհիվ $\sin x + \cos x = p$ $(\sin x - \cos x = p)$ նոր փոփոխականի ներմուծմամբ այդպիսի հավասարումը բերվում է p-ի նկատմամբ հանրահաշվական հավասարման:

Օրինակ 5: Լուծենք $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 5$ հավասարումը:

Լուծում: Հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք $\sin x \cos x$-ով, կստանանք համարժեք հավասարում՝

$$\sin x + \cos x + 1 = 5 \sin x \cos x,$$

պայմանով, որ $\sin x \cos x \neq 0$:

Դիցուք՝ $\sin x + \cos x = z$, այդ դեպքում $\sin x \cos x = \frac{z^2 - 1}{2}$, ուստի վերջին հավասարումը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$z^2 - 2z - 7 = 0, \text{ որում՝ } z^2 - 1 \neq 0:$$

Ստացված քառակուսային հավասարման արմատներն են՝

$$z_1 = -1, \qquad z_2 = \frac{7}{5}:$$

$z = -1$ արժեքը չի բավարարում $z^2 - 1 \neq 0$ պայմանին: Մնում է լուծել $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ հավասարումը (որը համարժեք է ելակետային հավասարմանը): Այդ հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ով, այնուհետև հաշվի առնելով երկու թվերի տարբերության կոսինուսի բանաձևը, հաջորդաբար կունենանք՝

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{7\sqrt{2}}{10},$$
$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{7\sqrt{2}}{10},$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}:$$

Քանի որ $\frac{7\sqrt{2}}{10}<1$, ուստի վերջին հավասարումն արմատ ունի: Լուծելով այն՝ կստանանք.

$$x=\pm\arccos\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in Z:$$

Ստացված թվերի բազմությունը նաև տրված հավասարման արմատների բազմությունն է:

$R(\sin x;\ \cos x)=0$ տեսքի ռացիոնալ հավասարումներից քննարկեցինք միայն առանձնահատուկ տեսք ունեցող այնպիսի հավասարումներ, որոնք նոր փոփոխականի փոխարինումով բերվում էին հանրահաշվական հավասարումների: Բնական հարց է առաջանում. արդյոք $R(\sin x;\ \cos x)=0$ տեսքի կամայական հավասարում որևէ տեղադրությամբ կարելի՞ է բերել հանրահաշվական հավասարման: Պարզվում է, որ՝ այո՛: Բավական է հիշել $\sin x$ և $\cos x$-ը $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-ով արտահայտող բանաձևերը՝

$$\sin x\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

որոնց շնորհիվ էլ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ տեղադրությամբ $R(\sin x;\ \cos x)=0$ հավասարումը հանգեցվում է $R\left(\frac{2t}{1+t^2};\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=0$ $(R_1(t)=0)$ հավասարմանը, որը, ակնհայտորեն, ռացիոնալ հավասարում է t-ի նկատմամբ: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ փոփոխականի փոխարինումն անվանում են ունիվերսալ տեղադրում:

Դիտողություն: *Քանի որ վերը նշված բանաձևերը տեղի ունեն միայն* $x\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$ *պայմանով, ուստի,* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ *տեղադրությամբ ստացվող հավասարումը լուծելուց բացի, հարկավոր է նաև անմիջական տեղադրությամբ պարզել՝* $x=\pi+2\pi k$ *տեսքի թվերը հանդիսանու՞մ են արդյոք տրված հավասարման արմատներ:*

Օրինակ՝ $\sin x-3\cos x=3$ հավասարումը վերը նշված բանաձևերի կի-րառմամբ բերվում է

$$\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}-3\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=3$$

հավասարմանը, որն արդեն համարժեք չէ տրվածին, քանի որ $x=\pi+2\pi n$ $(n\in Z)$ տեսքի թվերը տրված հավասարման արմատներն են (դրանում համոզվում ենք՝ տեղադրությամբ), իսկ երկրորդ հավասարման համար՝ ոչ (այդպիսի արժեքների դեպքում $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$-ը որոշված չէ):

Օրինակ 6. Լուծենք հետևյալ հավասարումը՝ $5\sin 2x-5\cos 2x=\mathrm{tg}x+5$:

Լուծում: Օգտվելով (XXIX) և (XXX) բանաձևերից՝ $\sin 2x$ և $\cos 2x$-ն արտահայտենք $\mathrm{tg}x$-ով՝

$$\sin 2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x},\ \cos 2x=\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}:$$

Այս նույնությունների շնորհիվ տրված հավասարումը բերվում է

$$5\cdot\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}-5\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}=\mathrm{tg}x+5$$

հավասարմանը:

Չնայած այն բանին, որ տեղի ունեցավ տրված հավասարման ձախ մասի արտահայտության թաբ-ի փոխարինում (R-ից հանվեց $\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$ տեսքի թվերի բազմությունը), սակայն տրված հավասար-ման թաբ-ը չենթարկվեց փոփոխության: Այդ փաստը վկայում է նրա աջ մասում գտնվող $\mathrm{tg}x$-ը: Հետևաբար, ստացված հավասարումը համարժեք է տրվածին: $\mathrm{tg}x$-ը փոխարինելով p-ով, կունենանք՝

$$\frac{10p}{1+p^2}-5\cdot\frac{1-p^2}{1+p^2}=p+5:$$

Որոշ ձևափոխություններից հետո ստացվում է այդ հավասարմանը համարժեք հետևյալ հավասարումը՝

$$p^3-9p+10=0:$$

$p=2$ թիվն այդ հավասարման ակնառու (նկատվող) արմատ է, նշա-նակում է՝ ձախ մասը բաժանվում է $(p-2)$-ի: Հավասարման ձախ մասը վերածելով բազմապատկիչների, կունենանք՝

$$(p-2)(p^2+2p-5)=0:$$

p^2+2p-5 հավասարման արմատներն են՝

$$p_1=\sqrt{6}-1,\ p_2=-\sqrt{6}-1:$$

Այսպիսով, տրված հավասարումը համարժեք է պարզագույն հավասարումների հետևյալ համախմբին՝

$$\mathrm{tg}x=2,\quad \mathrm{tg}x=\sqrt{6}-1,\quad \mathrm{tg}x=\sqrt{6}-1:$$

Որտեղից էլ կստանանք տրված հավասարման բոլոր լուծումները՝

$$x=\mathrm{arctg}2+\pi k,\ \ k\in Z;$$

$$x=\mathrm{arctg}(\sqrt{6}-1)+\pi k,\ k\in Z;$$

$$x=-\mathrm{arctg}\left(\sqrt{6}+1\right)+\pi k,\ k\in Z:$$

5. Եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման գնահատման մեթոդը

Որոշ եռանկյունաչափական հավասարումներ հաջողվում է լուծել հետևյալ հայտնի փաստի հիման վրա.

Ցանկացած իրական x թվի դեպքում

$$-1\le\sin x\le 1,\qquad -1\le\cos x\le 1:$$

Բացի դրանից՝ այստեղ օգտակար կլինեն նաև հետևյալ պնդումները.

Ցանկացած x-ի դեպքում

$$\sin^n x\le\sin^2 x,\ \cos^n x\le\cos^2 x\ \ (n\ge 2,\quad n\in N):$$

Այս անհավասարությունները կարելի է հեշտությամբ ապացուցել, ելնելով հետևյալ պարզ դատողությունից՝

եթե $|p|\le 1$, ապա $p^m\le 1$, որտեղ $m=0,1,2,3,\ldots$:

Օրինակ 1: Լուծենք $\cos 4x+2\sin x=4+\sin 15x$ հավասարումը:

Լուծում: Քանի որ ցանկացած x-ի դեպքում $\sin x\le 1$, $\cos 4x\le 1$ և $\sin 15x\ge -1$, ուստի հավասարման ձախ մասը՝ $\cos 4x+2\sin x\le 3$, իսկ աջ մասը՝ $4+\sin 3x\ge 3$: Նշանակում է՝ $\cos 4x+2\sin x$ և $\sin x\cos x=\dfrac{z^2-1}{2}$ արտահայտությունների միջև հավասարության դեպք կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\cos 4x+2\sin x=3\ \text{և}\ \ 4+\sin 15x=3:$$

Լուծենք ստացված հավասարումներից առաջինը: Վերոհիշյալ նկատառումների շնորհիվ այդ հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\sin x = 1 \text{ և } \cos 4x = 1:$$

$\sin x = 1$ հավասարման արմատներն են՝ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$:

Այդպիսի x-երի դեպքում

$$\cos 4x = \cos 4\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \cos\left(2\pi + 2\pi k\right) = 1 \text{ և}$$

$$\sin 15x = \sin 15\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin(7,5\pi + 30\pi k) = \sin 1,5\pi = -1:$$

Հետևաբար, տրված հավասարման համարժեք

$$\cos 4x + 2\sin x = 3,\ 4 + \sin 15x = 3$$

համակարգի լուծումները $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in Z)$ տեսքի թվերն են:

Պատասխան՝ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in Z)$:

Օրինակ 2: Լուծենք $\sin^6 x + \cos^8 x = \mathrm{tg}^2 \frac{3}{2}x - 2\mathrm{tg}\frac{3}{2}x + 2$ հավասարումը:

Լուծում: Հավասարումն արտագրենք այսպես՝

$$\sin^6 x + \cos^8 x = 1 + \left(\mathrm{tg}\frac{3}{2}x - 1\right)^2:$$

Այս տեսքից պարզ երևում է, որ հավասարման աջ մասի արտահայտությունը փոքր չէ 1-ից, այսինքն՝

$$1 + \left(\mathrm{tg}\frac{3}{2}x - 1\right)^2 \geq 1:$$

Գնահատենք այդ հավասարման ձախ մասը: Քանի որ ցանկացած x-ի դեպքում $\sin^6 x \leq \sin^2 x$ և $\cos^8 x \leq \cos^2 x$, ուստի՝

$$\sin^6 x + \cos^8 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1:$$

Հետևաբար, տրված հավասարումը կարող է արմատ ունենալ այն և միայն այն դեպքում, եթե միաժամանակ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

$$1 + \left(\mathrm{tg}\frac{3}{2}x - 1\right)^2 = 1 \text{ և } \sin^6 x + \cos^8 x = 1:$$

Ստացված հավասարումներից առաջինից կունենանք՝

$\mathrm{tg}\frac{3}{2}x = 1$, որտեղից՝ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\quad k \in Z$:

Լուծենք երկրորդ հավասարումը: Վերն արված դատողություններից հետևում է, որ

$$\sin^6 x+\cos^8 x=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^6 x=\sin^2 x,\\ \cos^8 x=\cos^2 x:\end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ վերջին համակարգի լուծումները $x=\frac{\pi m}{2}$ $(m\in Z)$ տեսքի թվերն են: Մնում է որոշել $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\middle|k\in Z\right\}$ և $\left\{\frac{\pi m}{2}\middle|m\in Z\right\}$ բազմությունների հատումը:

$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}=\frac{\pi m}{2}$ հավասարությունից կունենանք՝ $1+4k=3m$, որը ներկայացնելով $m=k+\frac{k+1}{3}$ տեսքով, եզրակացնում ենք՝ բավական է պահանջել, որ $\frac{k+1}{3}$-ը լինի ամբողջ թիվ.

$$\frac{k+1}{3}=q \quad (q\in Z),$$

որտեղից կստանանք՝ $k=3q-1$: Այդ դեպքում $m=4q-1$, ուստի $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi q$ $(q\in Z)$: Հետևաբար, նշված բազմությունների ընդհանուր մասը $-\frac{\pi}{2}+2\pi q$ $(q\in Z)$ տեսքի թվերի բազմությունն է, որն էլ տրված հավասարման լուծումների բազմությունն է:

Պատասխան՝ $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi q\middle|q\in Z\right\}$:

Օրինակ 3: Գտնենք $4\sin 3x+\sqrt{2}\sin^4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=4\cos 3x-4\sqrt{2}$ հավասարման բոլոր այն արմատները, որոնք պատկանում են $[-2\pi;2\pi]$ հատվածին:

Լուծում: Տրված հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրին.

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x+1\right)+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0,$$

$$4\left(\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0:$$

Քանի որ վերջին հավասարման ձախ մասի գումարելիները ոչբացասական են, ուստի այն համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-1, \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0: \end{cases}$$

Համակարգի երկրորդ հավասարումից հետևում է, որ

$$x=-\frac{\pi}{12}+\pi k \quad (k\in Z):$$

x-ի այդ արժեքները տեղադրելով համակարգի առաջին հավասարման մեջ, կունենանք՝

$$\sin\left(3\pi k-\frac{\pi}{2}\right)=-1,$$

որն էլ կդառնա ճիշտ հավասարություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $k=2m$, $m\in Z$: Հետևաբար, տրված հավասարման լուծումների բազմությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$x=-\frac{\pi}{12}+2\pi m \quad (m\in Z):$$

Դժվար չէ հասկանալ, որ այդ տեսքի թվերից միայն $x_1=-\frac{\pi}{12}$ (երբ $m=0$) և $x_2=\frac{23}{12}\pi$ (երբ $m=1$) թվերն են պատկանում $[-2\pi;2\pi]$ հատվածին:

Պատասխան՝ $-\frac{\pi}{12};\ \frac{23}{12}\pi:$

6. Պարամետր պարունակող եռանկյունաչափական հավասարումներ

Դուք առնչվել եք պարամետր պարունակող հանրահաշվական հավասարումների հետ: Այժմ դիտարկենք պարամետր պարունակող եռանկյունաչափական հավասարումների օրինակներ:

Օրինակ 1: a-ի ինչ արժեքների դեպքում $\sin^6 x+\cos^6 x=a$ հավասարումն ունի արմատ: Գտնել այդ արմատները:

Լուծում: Հավասարման ձախ մասը ձևափոխենք այսպես.

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3=$$

$$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=$$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5+3\cos 4x}{8}:$$

Հետևաբար, տրված հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարմանը՝

$$\frac{5+3\cos 4x}{8}=a,$$

որտեղից կունենանք՝

$$\cos 4x=\frac{8a-5}{3}:$$

Ակնհայտ է, որ այս հավասարումը լուծում ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$-1\le\frac{8a-5}{3}\le 1:$$

Լուծելով այս կրկնակի անհավասարումը, կստանանք՝

$$\frac{1}{4}\le a\le 1:$$

Այդպիսի a–երի համար վերջին հավասարման (հետևաբար նաև տրվածի) արմատներն են՝

$$x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{\pi k}{2}\quad(k\in Z):$$

Պատասխան՝ $a\in\left[\frac{1}{4};1\right]$: $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z:$

Օրինակ 2: a–ի յուրաքանչյուր արժեքի համար գտնել $a\,\mathrm{tg}x+\cos 2x=1$ հավասարման արմատների քանակը $[0;2\pi]$ հատվածում:

Լուծում: Ունենք՝

$$a\,\mathrm{tg}x+\cos 2x=1\Leftrightarrow a\,\mathrm{tg}x-(1-\cos 2x)=0\Leftrightarrow\frac{a\sin x}{\cos x}-2\sin^2 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin x(a-2\sin x\cos x)}{\cos x}=0\Leftrightarrow\frac{\sin x(\sin 2x-a)}{\cos x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x=0, & (*)\\ \begin{cases}\sin 2x=a,\\ \cos x\ne 0:\end{cases} & (**)\end{array}\right.$$

$[0;2\pi]$ հատվածում (*) հավասարումն ունի ճիշտ երեք արմատ $(0;\pi;2\pi)$:

$|a|>1$ դեպքում, ակնհայտորեն, (**) համակարգը լուծում չունի, հետևաբար, այդպիսի a–երի դեպքում (երբ $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$) համախումբն (ուստի նաև տրված հավասարումը) ունի ճիշտ երեք լուծում:

Երբ $a=0$, կունենանք՝

$$\begin{cases}\sin 2x = 0,\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x \sin x = 0,\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0:$$

Նշանակում է՝ $a = 0$ դեպքում ևս համախումբն ունի ճիշտ երեք լուծում:

Հասկանալի է, որ $a \in [-1;0) \cup (0;1]$ պայմանով (**) համակարգը համարժեք է $\sin 2x = a$ հավասարմանը (այդ պնդումը հետևում է $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ նույնությունից):

$\sin 2x = -1$ $(a = -1)$ և $\sin 2x = 1$ $(a = 1)$ հավասարումներից յուրաքանչյուրը $[0;2\pi]$ միջակայքում ունի ճիշտ երկու արմատ (համապատասխանաբար, $\left\{\frac{3}{4}\pi;\frac{7\pi}{4}\right\}$ և $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$), որոնք տարբեր են վերը նշված թվերից:

Մնացած՝ $(-1, 0) \cup (0, 1)$ դեպքում $\sin 2x = a$ հավասարումը $[0;2\pi]$ միջակայքում ունի ճիշտ չորս արմատ: Իրոք, քանի որ $t = 2x \in [0;4\pi]$, իսկ $\sin t = a$ հավասարումն այդ միջակայքում ունի ճիշտ չորս լուծում (երկուսը՝ $[0;2\pi]$–ում, մյուս երկուսը՝ $[2\pi;4\pi]$–ում): Այսպիսով կարող ենք գրել պատասխանը.

Երեք արմատ, եթե $a \in (-\infty;-1) \cup \{0\} \cup (1;\infty)$,

հինգ արմատ, եթե $a = \pm 1$,

յոթ արմատ, եթե $a \in (-1;0) \cup (0;1)$: