ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§ 2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

2. Ֆունկցիաների մոնոտոնության հասկացությունը

Ֆունկցիաների մոնոտոնությունը քննարկելիս օգտակար կլինեն հետևյալ ընդհանուր պնդումները.

1) Եթե f ֆունկցիան աճող է X բազմության վրա, ապա ցանկացած c թվի համար $(f+c)$-ն նույնպես աճող է X-ի վրա:

2) Եթե f ֆունկցիան աճող է X բազմության վրա և $c>0$, ապա cf-ը աճող է X-ի վրա:

3) Եթե f ֆունկցիան աճող է X բազմության վրա, ապա $-f$ ֆունկցիան նվազող է այդ բազմության վրա:

4) Եթե X բազմության վրա f ֆունկցիան աճող է և պահպանում է նշանը, ապա $\frac{1}{f}$ ֆունկցիան նվազող է այդ բազմության վրա:

5) Եթե f և g ֆունկցիաներն աճող են X բազմության վրա, ապա $(f+g)$-ն նույնպես աճող է այդ բազմության վրա:

6) Եթե f և g ֆունկցիաները X բազմության վրա աճող և ոչբացասական են, ապա fg արտադրյալը նույնպես աճող է X բազմության վրա:

7) Եթե f ֆունկցիան աճող ու ոչբացասական է X բազմության վրա և n-ը բնական թիվ է, ապա f^n ֆունկցիան նույնպես աճող է X բազմության վրա:

8) Եթե f ֆունկցիան աճող է X բազմության վրա, իսկ g ֆունկցիան աճող է f ֆունկցիայի արժեքների $E(f)$ բազմության վրա, ապա այդ ֆունկցիաների $g\circ f$ բաղադրույթն աճող է X բազմության վրա:

Վերոհիշյալ բոլոր պնդումներն անմիջապես հետևում են անհավասարությունների հատկություններից և ֆունկցիաների աճող ու նվազող լինելու սահմանումներից:

Ապացուցենք, օրինակ, 4–րդ հատկությունը:

Դիցուք՝ $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ և $x_2 > x_1$: Դիտարկենք $g(x_2)-g(x_1)$ տարբերությունը, որտեղ $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

$$g(x_2)-g(x_1)=\frac{1}{f(x_2)}-\frac{1}{f(x_1)}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)\cdot f(x_1)}:$$

Ստացված կոտորակի համարիչը բացասական է (քանի որ f–ն աճող է X–ում, ուստի $f(x_1)<f(x_2)$), իսկ հայտարարը դրական է ($f(x_2)$ և $f(x_1)$ թվերը միևնույն նշանի են): Հետևաբար, $g(x_2)-g(x_1)<0$, այսինքն՝ $g(x_2)<g(x_1)$, որն էլ նշանակում է, որ $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ ֆունկցիան նվազող է X բազմության վրա:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ $f(x)=x^3+x$ ֆունկցիան աճող է:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ $\varphi(x)=x$–ը R–ում աճող ֆունկցիա է: Ցույց տանք, որ $g(x)=x^3$ ֆունկցիան ևս R–ում աճող է: Իրոք. դիցուք՝ $x_1, x_2 \in R$ և $x_2>x_1$, այդ դեպքում, թվային անհավասարությունների հատկություններից մեկի շնորհիվ, $x_2^3>x_1^3$, այսինքն՝ $g(x_2)>g(x_1)$, որը նշանակում է՝ x^3 ֆունկցիան R–ում աճող է: f ֆունկցիան, որպես երկու աճող ֆունկցիաների գումար, նույնպես աճող ֆունկցիա է (պնդում 5)):

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x}$ ֆունկցիան. ա) աճող է $(-\infty;-1]$ և $[1;\infty)$ միջակայքերում, բ) նվազող է $[-1;0)$ և $(0;1]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Լուծում: Դիցուք՝ $x_2>x_1$ ($x_1, x_2 \in D(f)$): Կազմենք ֆունկցիայի համապատասխան արժեքների տարբերությունը՝

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1+x_2^2}{x_2}-\frac{1+x_1^2}{x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{x_2x_1}:$$

Նկատենք, որ եթե x_1–ը և x_2–ը $(-\infty;-1]$ միջակայքից են, ապա $x_1x_2>1$, ուստի $f(x_2)-f(x_1)>0$, այսինքն՝ $f(x_2)>f(x_1)$: Նշանակում է՝ $(-\infty;-1]$ միջակայքում f–ն աճող է: Պարզ է, որ $[1;+\infty)$ միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար $x_1x_2>1$, ուստի՝ $f(x_2)>f(x_1)$, հետևաբար այդ միջակայքում նույնպես f–ն աճող է: Այնուհետև, դժվար չէ հասկանալ, որ $[-1;0)$ և $(0;1]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի ցանկացած x_1 և x_2 $(x_2>x_1)$ թվերի համար $0<x_1x_2<1$, ուստի $f(x_2)-f(x_1)<0$, այսինքն՝ $f(x_2)<f(x_1)$: Այդ նշանակում է, որ f ֆունկցիան այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում նվազող է: