ԳԼՈՒԽ **3**

ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§ 3. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

2. Ֆունկցիաների մոնոտոնության հասկացությունը

Առաջադրանքներ

1. Ապացուցել կետ 2-ի 1)–8) պնդումները:

2. f ֆունկցիան P բազմության վրա աճող է միայն այն դեպքում, երբ P բազմությանը պատկանող ցանկացած x_1-ի և x_2-ի համար $x_1 - x_2$ և $f(x_1) - f(x_2)$ տարբերություններն ունեն նույն նշանը $(x_1 \neq x_2)$:

3. f ֆունկցիան P բազմության վրա նվազող է միայն այն դեպքում, երբ P բազմությանը պատկանող ցանկացած x_1-ի և x_2-ի համար $x_1 - x_2$ և $f(x_1) - f(x_2)$ տարբերություններն ունեն տարբեր նշաններ ($x_1 \neq x_2$):

Հետազոտել ֆունկցիան մոնոտոնության (աճման և նվազման) առումով (4, 5).

4. ա) $y = x^5 + 8x^3 + x$; բ) $y = x^{20} + x^{10} + 1$:

5. ա) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+4}$; բ) $y = \dfrac{x^2-4x+7}{x^2-4x+5}$:

6. Ապացուցել, որ $f(x) = x^3 + x^2$ ֆունկցիան՝

ա) $(0;\infty)$ միջակայքում աճող է,

բ) $[-1;0]$ հատվածի վրա մոնոտոն չէ:

7. Ապացուցել, որ $f(x) = x^3 - 3x^2$ ֆունկցիան $[0;2]$ հատվածում նվազող է, իսկ $(-\infty;0]$ և $[2;\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում՝ աճող:

8. Ապացուցել հետևյալ պնդումը. ***Մոնոտոն ֆունկցիան իր յուրաքանչյուր արժեքն ընդունում է արգումենտի միայն մեկ արժեքի դեպքում:***

9. $f(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt{x-5}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը քանի՞ կետում է հատում $y=14$ ուղիղը:

Օգտվելով ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկությունից՝ լուծել հավասարումը կամ անհավասարումը (10–13).

10. ա) $x^5+3x=38$: բ) $\dfrac{1}{x^3}-2x=7$:

11. ա) $\sqrt{2x-9}+\dfrac{x}{27}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3$: բ) $\sqrt{5-4x}+\sqrt[3]{59-x}=9$:

12. ա) $x+x^3+x^5\le 42$: բ) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-4x\ge 1$:

13. ա) $x+x^2\le 33-\sqrt{3x-6}$: բ) $3x-1>\dfrac{4}{x}+\sqrt{11-x}$:

14. Տրված է՝ $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^3+2x-12}$:

ա) Գոյություն ունի՞ Ox առանցքին զուգահեռ այնպիսի ուղիղ, որը f ֆունկցիայի գրաֆիկը հատի մեկից ավելի կետերում:

բ) Գտնել $f(x)$-ի մեծագույն արժեքը:

ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ, ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ, ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

2. Դիցուք՝ f ֆունկցիան P բազմությունում աճող է: Այդ նշանակում է, որ նշված բազմության ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար, որտեղ $x_2>x_1$, հետևում է $f(x_2)>f(x_1)$ անհավասարությունը: Հետևաբար, x_2-x_1 և $f(x_2)-f(x_1)$ տարբերությունները դրական են, այսինքն՝ միևնույն նշանի են: Հակառակը՝ եթե x_1-x_2 և $f(x_1)-f(x_2)$ տարբերությունները միևնույն նշանի են, ապա $x_1>x_2$-ից հետևում է $f(x_1)>f(x_2)$ կամ $x_1<x_2$-ից հետևում է $f(x_1)<f(x_2)$: Սահմանման համաձայն f ֆունկցիան աճող է նշված բազմությունում:

3. Տես նախորդ խնդրի լուծումը:

4. ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը R-ն է: R-ում $y=x^5$, $y=8x^3$ և $y=x$ ֆունկցիաներն աճող են, հետևաբար աճող կլինի նաև $y=x^5+8x^3+x$ ֆունկցիան: բ) Ֆունկցիան որոշված է R-ում, ընդ որում՝ այն զույգ ֆունկցիա է: Դիտարկենք $[0;\infty)$ միջակայքը: Այդ միջակայքում $y=x^{20}$

և $y=x^{10}+1$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն աճող է (այդ միջակայքում $y=x^k$, որտեղ $k\in N$, աճող է, քանի որ $x_2>x_1 \Leftrightarrow x_2^k>x_1^k$): Հետևաբար, աճող կլինի նաև $y=x^{20}+x^{10}+1$ ֆունկցիան: Ֆունկցիայի զույգ լինելու շնորհիվ տրված ֆունկցիան $(-\infty\,;0]$ միջակայքում նվազող է:

***Պատասխան*՝** նվազող է $(-\infty;0]$-ում և աճող՝ $[0;\infty)$-ում:

5. ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը R-ն է և այն զույգ ֆունկցիա է: Ունենք՝

$$y=1-\frac{3}{x^2+4}:$$

Դիտարկենք $[0;\infty)$ միջակայքը: Քանի որ $y=x^2+4$ ֆունկցիան այդ միջակայքում աճող է և դրական, ուստի $y=\frac{3}{x^2+4}$ ֆունկցիան նվազող է: Մոնոտոն ֆունկցիայի այլ հատկության շնորհիվ $y=-\frac{3}{x^2+4}$ ֆունկցիան, հետևաբար, նաև $y=1-\frac{3}{x^2+4}$ ֆունկցիան կլինի աճող: Ֆունկցիայի զույգ լինելու շնորհիվ $(-\infty;0]$ միջակայքում այն կլինի նվազող:

Այսպիսով, ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;0]$ միջակայքում, աճող՝ $[0;\infty)$ միջակայքում: բ) Ֆունկցիայի անալիտիկ արտահայտությունը ներկայացնենք այսպես՝

$$y=1+\frac{2}{(x-2)^2+1}:$$

Քանի որ $y=(x-2)^2+1$ ֆունկցիան $(-\infty;2]$ միջակայքում նվազող է, իսկ $[2;\infty)$-ում՝ աճող, և ամենուրեք պահպանում է դրական նշան, ուստի $y=\frac{2}{(x-2)^2+1}$ ֆունկցիան, ընդհակառակը, աճող է $(-\infty;2]$-ում, նվազող՝ $[2;\infty)$-ում:

6. ա) Քանի որ $y=x^2$ և $y=x^3$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը $[0;\infty)$ միջակայքում աճող է, ուստի դրանց գումարը՝ $f(x)=x^3+x^2$ ֆունկցիան ևս աճող է այդ միջակայքում:

բ) Քանի որ $f(-1)=0$, $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$, $f(0)=0$, ուստի, իրոք, f ֆունկցիան $[-1;0]$ միջակայքում մոնոտոն չէ:

7. Ցուցում: Ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար, որտեղ $x_1<x_2$, ունենք.

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_1x_2+x_1^2-3x_2-3x_1\right):$$

Քանի որ $x_2-x_1>0$, ուստի բավական է նշված միջակայքերից յուրաքանչյուրում որոշել

$$x_2^2+x_1x_2+x_1^2-3x_2-3x_1$$

արտահայտության նշանը:

ա) Դիցուք՝ x_1, $x_2 \in (-\infty\,;0]$: Ակնհայտ է, որ այս դեպքում

$$x_2^2+x_1x_2+x_1^2-3x_2-3x_1>0:$$

Հետևաբար, $f(x_2)-f(x_1)>0$, այսինքն՝ $f(x_2)>f(x_1)$: Նշանակում է՝ $(-\infty\,;2]$ միջակայքում f ֆունկցիան աճող է:

բ) Դիցուք՝ x_1, $x_2 \in [0;2]$: Այդ դեպքում կարող ենք գրել՝

$$x_1^2<2x_1,\quad x_2^2\le 2x_2,\quad x_1x_2<2x_1<x_1+x_2:$$

Այս անհավասարություններից հետևում է, որ

$$x_1^2+x_2^2+x_1x_2<3x_2+3x_1,$$

այսինքն՝

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-3x_2<0:$$

Հետևաբար, $f(x_2)-f(x_1)<0$, այսինքն՝ $f(x_2)<f(x_1)$, որն էլ նշանակում է, որ *f* ֆունկցիան, իրոք, [0; 2] միջակայքում նվազող է:

գ) [2; ∞) միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 ($x_1<x_2$) թվերի համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$x_1^2\ge 2x_1,\quad x_2^2>2x_2,\quad x_1x_2\ge 2x_1>x_1+x_2,$$

հետևաբար՝

$$x_1^2+x_2^2+x_1x_2>3x_2+3x_1,$$

այսինքն՝ $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-3x_2>0$:

Ստացվում է, որ [2; ∞) միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար, երբ $x_2>x_1$, ապա $f(x_2)>f(x_1)$: Նշանակում է՝ *f* ֆունկցիան այդ միջակայքում աճող է:

9. Մեկ: **10.** ա) $x=2$, բ) $x=\dfrac{1}{2}$: **11.** ա) $x=9$, բ) $x=-5$: **12.** ա) $(-\infty;\,2]$, բ) $\left(0;\,\dfrac{1}{4}\right]$: **13.** ա) $[2;\,5]$, բ) $(2;\,11]$: **14.** ա) Դժվար չէ նկատել, որ *f* ֆունկցիան իր որոշման տիրույթում նվազող է: Իրոք, *f*-ի որոշման տիրույթում $y=\sqrt{x^3+2x-12}$ ֆունկցիան աճող է (քանի որ $g(x)=x^3+2x-12$ ֆունկցիան *R*-ում աճող է՝ որպես x^3 և $2x-12$ աճող ֆունկցիաների գումար), հետևաբար, $y=-\sqrt{x^3+2x-12}$ ֆունկցիան նվազող է: Տրված ֆունկցիան էլ $y=\dfrac{1}{x}$ և $y=-\sqrt{x^3+2x-12}$ նվազող ֆունկցիաների գումարն է, որը կդառնա նվազող ֆունկցիա: Իսկ մոնոտոն ֆունկցիայի գրաֆիկը չի կարող հատել Ox առանցքին զուգահեռ ուղիղը մեկից ավելի կետերում:

բ) f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $[2;\infty)$ միջակայքն է.

$$(x^3+2x-12\geq 0 \Leftrightarrow \left(x^3-8\right)+\left(2x-4\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2+2x+6\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\left(x+1\right)^2+5\right)\geq 0 \Leftrightarrow x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2):$$

Քանի որ այդ միջակայքում f ֆունկցիան նվազող է, ուստի այն ամենամեծ արժեքը կընդունի $x=2$ կետում՝ $\max f(x)=f(2)=\dfrac{1}{2}$:

Պատասխան՝ ա) ոչ, բ) $\dfrac{1}{2}$: