ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§ 2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Զույգ և կենտ ֆունկցիաներ

Առաջադրանքներ

1. Գտնել պայման, որի առկայության դեպքում f ֆունկցիայի գրաֆիկը կլինի համաչափ $x=a$ ուղղի նկատմամբ:

2. Գտնել պայման, որի առկայության դեպքում f ֆունկցիայի գրաֆիկը կլինի համաչափ $M(a;b)$ կետի նկատմամբ:

3. Գտնել ֆունկցիայի գրաֆիկի համաչափության առանցքը.

ա) $f(x)=(x-3)^4+2(x-3)^2+5$; բ) $f(x)=x^2-3x+5$;

գ) $f(x)=(x-2)^3+3(x-2)-6$; դ) $f(x)=(x+4)^5+(x+4)^3-1$:

4. Ապացուցել, որ 0 սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ որոշման տիրույթ ունեցող ցանկացած f ֆունկցիայի համար $y=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ ֆունկցիան զույգ է, իսկ $y=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ ֆունկցիան՝ կենտ:

5. Ապացուցել, որ ցանկացած ֆունկցիա, որի որոշման տիրույթը համաչափ է 0 սկզբնակետի նկատմամբ, կարելի է ներկայացնել (ընդ որում՝ միակ ձևով) զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումարի տեսքով:

6. Գտնել բոլոր այն ֆունկցիաները, որոնք միաժամանակ և՛ կենտ են, և՛ զույգ:

7. Հետևյալ ֆունկցիաները ներկայացնել զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումարի տեսքով.

ա) $3x^2-x+7$; բ) $\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$; գ) $\dfrac{x^3+1}{x^2+4}$:

8. Ինչի՞ է հավասար $f(0)$-ն, եթե f-ը կենտ ֆունկցիա է և $0\in D(f)$:

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ, ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ, ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1. $f(x-a)=f(x+a)$ (այլ կերպ ասած, եթե $y=f(x+a)$-ն զույգ ֆունկցիա է):

2. Դիցուք՝ x փոփոխականն այնպիսին է, որ $(a-x)\in D(f)$: Այդ դեպքում բավական է պահանջել, որ $(a+x)$-ը ևս պատկանի f ֆունկցիայի որոշման տիրույթին և $(a-x;\ f(a-x)),(a+x;\ f(a+x))$ կետերը համաչափ լինեն $M(a;b)$ կետի նկատմամբ, այսինքն՝ $\frac{f(a-x)+f(a+x)}{2}=b$, որտեղից՝

$$f(a-x)+f(a+x)=2b: \qquad (1)$$

Դիտողություն: *Վերջին հավասարությունը ներկայացնելով*

$$f(a-x)-b=-\left(f(a+x)-b\right)$$

տեսքով, եզրակացնում ենք, որ (1) պայմանը համարժեք է $y=f(a+x)-b$ ֆունկցիայի կենտ լինելու պայմանին:

3. ա) ***Ցուցում:*** Նկատել, որ $f(3-x)=f(3+x)$: Իսկ դա նշանակում է, որ $x=3$ ուղիղը f ֆունկցիայի համաչափության առանցքն է:

բ) ***Ցուցում:*** f ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է, որի գագաթի աբսցիսը հավասար է 1,5-ի: Հետևաբար, $x=1{,}5$ ուղիղը համաչափության առանցքն է:

գ) Ցուցում: Նկատել, որ

$$\frac{f(2-x)+f(2+x)}{2}=-6:$$

Հետևաբար, $(2;-6)$ կետը տրված ֆունկցիայի գրաֆիկի համաչափության կենտրոնն է:

դ) ***Ցուցում:*** Նկատել, որ

$$\frac{f(-4-x)+f(-4+x)}{2}=-1:$$

Հետևաբար, $(-4;-1)$ կետը f ֆունկցիայի գրաֆիկի համաչափության կենտրոնն է:

4. ***Ցուցում:*** $P(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ֆունկցիայի համար ստուգել $P(-x)=P(x)$ հավասարությունը, իսկ $q(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ ֆունկցիայի համար՝ $q(-x)=-q(x)$ հավասարությունը:

5. Քանի որ

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

հավասարությունը նույնություն է, ուստի $f(x)$-ը ներկայացվում է

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

զույգ ֆունկցիայի և

$$q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

կենտ ֆունկցիայի գումարի տեսքով (տե՛ս նախորդ խնդիրը):

Ապացուցենք, որ այդպիսի ներկայացումը միակն է: Իրոք, դիցուք՝

$$f(x) = P(x) + q(x),$$

որտեղ $P(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ $q(x)$-ը՝ կենտ ֆունկցիա: Այդ դեպքում ճիշտ կլինի նաև հետևյալ հավասարությունը՝

$$f(-x) = P(x) - q(x)$$

(քանի որ $P(-x) = P(x)$, իսկ $q(-x) = -q(x)$): (1) և (2) հավասարություններից կգտնենք՝

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \; q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

որն էլ հաստատում է միակությունը:

6. Դիցուք՝ f ֆունկցիան և՛ զույգ է, և՛ կենտ: Այդ դեպքում $D(f)$-ի ցանկացած x-ի դեպքում ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$f(-x) = f(x) \text{ և } f(-x) = -f(x):$$

Այս հավասարություններից կստանանք՝ $f(x) = 0$ (ցանկացած $x \in D(f)$ համար):

Ստուգումով համոզվում ենք, որ այդ ֆունկցիան միաժամանակ բավարարում է

$$f(-x) = f(x) \text{ և } f(-x) = -f(x)$$

պայմաններին: Հետևաբար, խնդրի պայմաններին բավարարող միակ ֆունկցիան է՝

$$f(x) = 0,$$

որի որոշման տիրույթը թվային ուղղի 0 սկզբնակետի նկատմամբ ցանկացած համաչափ բազմություն է (մասնավորաբար՝ R-ը):

7. ա) $3x^2 - x + 7 = \left(3x^2 + 7\right) + \left(-x\right)$, բ) $\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} = \dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x^4+x^2+1} + \left(-\dfrac{x^3+x}{x^4+x^2+1}\right)$,

գ) $\dfrac{x^3+1}{x^2+4} = \dfrac{1}{x^2+4} + \dfrac{x^3}{x^2+4}$:

8. Քանի որ f-ը կենտ ֆունկցիա է և $0 \in D(f)$, ապա $f(-0) = -f(0)$ որտեղից՝ $f(0) = 0$: