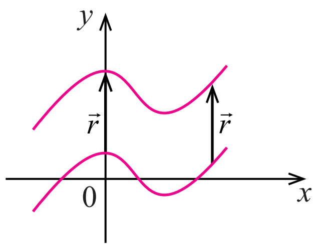
ՖՈՒՆԿՑԻԱ

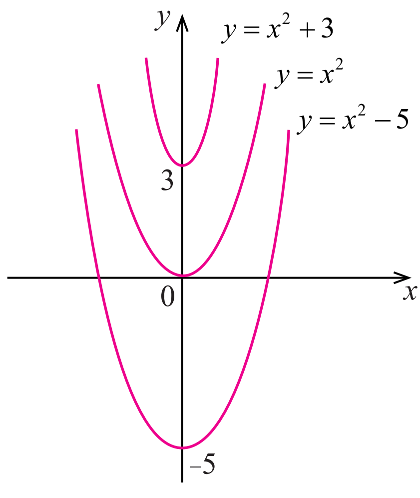
ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Երբեմն տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ մեկ այլ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ երկրաչափական ձևափոխությունների օգնությամբ: Պարզագույն երկրաչափական ձևափոխություններն են՝ ***կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ տեղափոխումները, առանցքային համաչափությունները և առանցքների նկատմամբ սեղմումն ու ձգումը:*** Առանձին-առանձին դիտարկենք նշված տարրական ձևափոխությունները և դրանց բաղադրույթները:

1^0. Գրաֆիկի տեղափոխում օրդինատների առանցքին զուգահեռ: g ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $g(x)=f(x)+a$, ստացվում է f ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ $\vec{r}(0;\ a)$ զուգահեռ տեղափոխումով (նկ. 1): Եթե a թիվը դրական է, գրաֆիկը տեղափոխվում է օրդինատների առանցքին զուգահեռ՝ դեպի վեր (a միավորով), իսկ եթե a-ն բացասական է՝ դեպի վար ($-a$ միավորով):

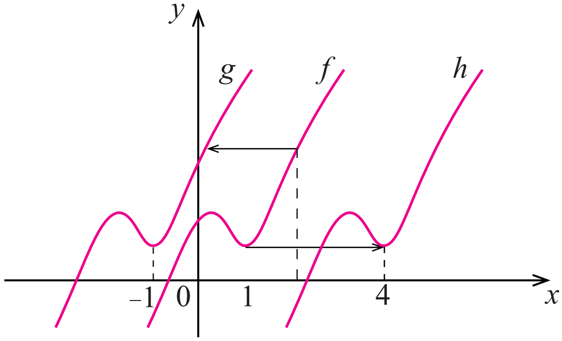


Նկ. 1



Նկ. 2

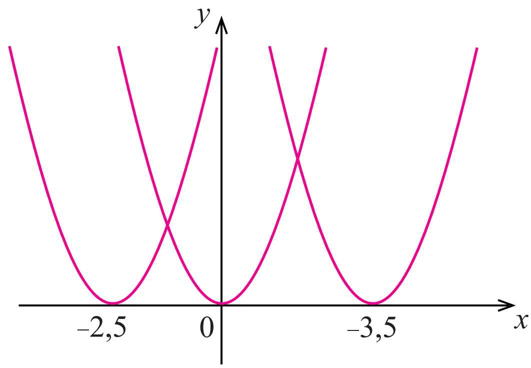
Օրինակ 1: $y=x^2+3$ քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից 3 միավորի չափ տեղափոխմամբ՝ օրդինատների առանցքին զուգահեռ դեպի վեր (նկ. 2), իսկ $y=x^2-5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ 5 միավորի չափ դեպի վար:



Նկ. 3

2⁰. Գրաֆիկի տեղափոխում աբսցիսների առանցքին զուգահեռ: 3-րդ նկարում պատկերված են f, g և h ֆունկցիաների գրաֆիկները, որտեղ $g(x)=f(x+a)$ և $h(x)=f(x+b)$: g ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է f ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ $\vec{r}(-a;0)$ զուգահեռ տեղափոխմամբ: Այդ նկարում $g(x)$ ֆունկցիայի համար a թիվը հավասար է 2-ի, իսկ $h(x)$ ֆունկցիայի համար b թիվը հավասար է –3-ի:

Օրինակ 2: $y=(x+a)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ $\vec{r}(-a;\ 0)$ զուգահեռ տեղափոխմամբ (նկ. 4, $a=2{,}5$ և $a=-3{,}5$):

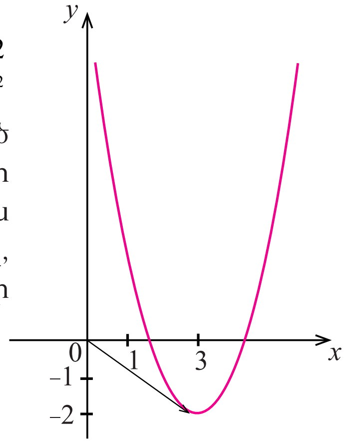


Նկ. 4

f ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա վերցնենք ցանկացած $(x;\ y)$ կետ: Այդ կետի կոորդինատները բավարարում են $y=f(x)$ հավասարությանը: $\vec{r}(-a;0)$ զուգահեռ տեղափոխման դեպքում $(x;y)$ կետը կանցնի $(x-a;y)$ կետին:

Ստացված կետի կոորդինատները բավարարում են $y=f(x-a+a)$ հավասարությանը, այսինքն՝ $y=g(x-a)$: Հետևաբար, զուգահեռ տեղափոխումից հետո $(x;y)$ կետը կգտնվի g ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա: Նման ձևով ստուգվում է, որ g ֆունկցիայի գրաֆիկի յուրաքանչյուր կետ ստացվում է այդ զուգահեռ տեղափոխումից հետո՝ f ֆունկցիայի գրաֆիկի մի որոշ կետից:

Օրինակ 3: 5-րդ նկարում $g(x)=(x-3)^2-2$ քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկն $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի նկատմամբ տեղափոխված է՝ օրդինատների առանցքին զուգահեռ դեպի վար 2 միավորի չափ և աբսցիսների առանցքին զուգահեռ՝ դեպի աջ 3 միավորի չափ: Այսպիսով, g ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվել է f ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ $\vec{r}(3;-2)$ զուգահեռ տեղափոխմամբ:



Նկ. 5

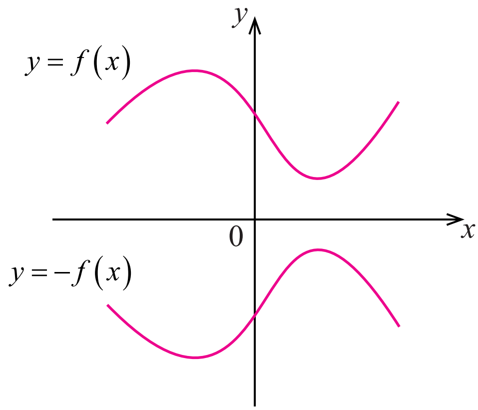
Օրինակ 4: Քառակուսային եռանդամը ձևափոխելով

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

տեսքի, նկատում ենք, որ $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ $\vec{r}(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a})$ զուգահեռ տեղափոխման դեպքում:

$y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ: Հետևաբար, $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկն էլ համաչափ է այդ զուգահեռ տեղափոխման դեպքում օրդինատների առանցքի կերպարի՝ $x=-\frac{b}{2a}$ ուղղի նկատմամբ:

3⁰. $y=-f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ այն համաչափ անդրադարձնելով աբսցիսների առանցքի նկատմամբ (հայելային արտապատկերում աբսցիսների առանցքի նկատմամբ): 6-րդ նկարում պատկերված են $y=f(x)$ և $y=-f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:



Նկ. 6

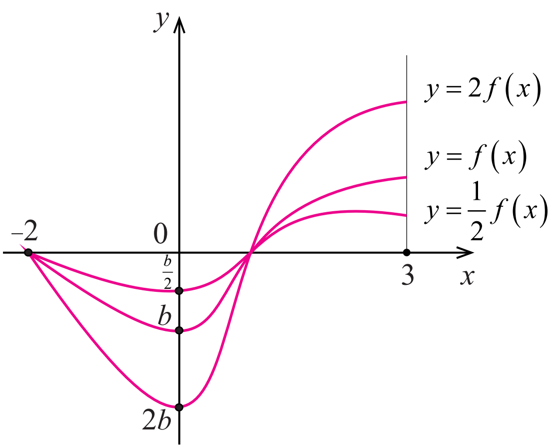
Իրոք, եթե $(a;b)$-ն $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի որևէ կետ է, ապա ճիշտ է $b=f(a)$ թվային հավասարությունը, հետևաբար, ճիշտ է նաև

$-b=-f(a)$ հավասարությունը, իսկ դա նշանակում է, որ $(a;-b)$ կետը պատկանում է $y=-f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Դրանով իսկ ցույց տվեցինք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիայի ցանկացած կետի համաչափն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ պատկանում է $y=-f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ $y=-f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած կետի համաչափն Ox առանցքի նկատմամբ պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

4^0. $y=f(-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ այն համաչափ անդրադարձնելով օրդինատների առանցքի նկատմամբ (հայելային արտապատկերում օրդինատների առանցքի նկատմամբ՝ նկ. 6):

Իրոք, $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած $(a;b)$ կետի համար ճիշտ է $b=f(a)$ հավասարությունը, այսինքն՝ $b=f(-a(-a))$ հավասարությունը: Վերջինս նշանակում է, որ $(-a;b)$ կետը պատկանում է $y=f(-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Մյուս կողմից, $(a;b)$ և $(-a;b)$ կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ: Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ նաև հակադարձ պնդումը՝ $y=-f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած կետի համաչափը Oy առանցքի նկատմամբ պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

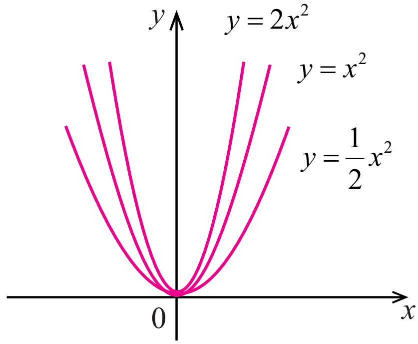


Նկ. 7

5^0. Գրաֆիկի ձգումն ու սեղմումն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ: Դիցուք՝ կոորդինատային հարթության վրա տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և պահանջվում է կառուցել $y=af(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $a>0$, $a\neq 1$: Հասկանալի է, որ $y=af(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի յուրաքանչյուր կետի օրդինատը ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան (նույն աբսցիսն ունեցող) կետի օրդինատից՝ բազմապատկած a-ով: Այդպիսի ձևափոխությունը կոչվում է ***ձգում*** a ***գործակցով*** Oy ***առանցքի երկայնքով***: Երբեմն այդպիսի ձևափոխությունն անվանում են Ox ***առանցքի նկատմամբ ձգում*** a անգամ:

7-րդ նկարում պատկերված $y=f(x),\ x\in[-2;3]$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով կառուցված են $y=2f(x)$ և $y=\frac{1}{2}f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

f ֆունկցիայի բոլոր արժեքները բազմապատկելով b թվով, երբ $0<b<1$, նրա գրաֆիկի բոլոր կետերի օրդինատները փոքրանում են $\frac{1}{b}$ անգամ և ստացվում է աբսցիսների առանցքի նկատմամբ գրաֆիկի սեղմում՝ $\frac{1}{b}$ անգամ:

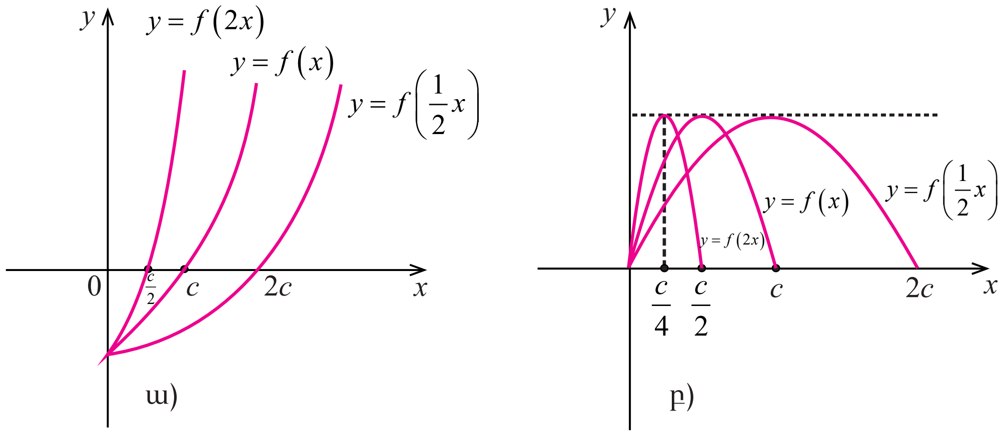


Նկ. 8

Օրինակ 5: $y=2x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 8) ստացվում է $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ աբսցիսների առանցքի նկատմամբ ձգումով 2 անգամ, իսկ $y=0,5x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ աբսցիսների առանցքի նկատմամբ սեղմումով 2 անգամ:

6⁰. Գրաֆիկի ձգումն ու սեղմումը օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

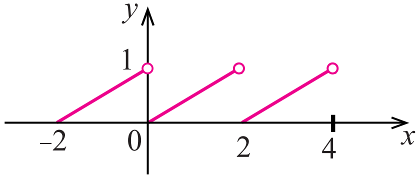
Դիցուք, մեզ հայտնի է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, և անհրաժեշտ է կառուցել $y=f(ax)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $a>0$ և $a\neq 1$: Այստեղ ենթադրվում է, որ եթե $x\in D(f)$, ապա $ax\in D(f)$: $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած $(x_0;\,y_0)$ կետի համար ճիշտ է $y_0=f(x_0)$ թվային հավասարությունը: Այդ դեպքում դժվար չէ նկատել, որ $\left(\frac{x_0}{a};\,y_0\right)$ կետը պատկանում է $y=f(ax)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Նշանակում է՝ $y=f(ax)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $\frac{x_0}{a}$ աբսցիսն ունեցող կետի օրդինատը համընկնում է ֆունկցիայի գրաֆիկի x_0 աբսցիսով կետի օրդինատին: Դրա համար էլ $y=f(ax)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ նրա բոլոր կետերի աբսցիսները բաժանելով a-ի վրա:



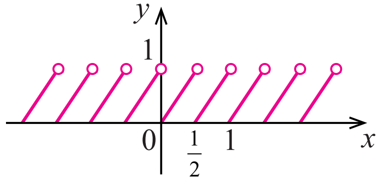
Նկ. 9

ֆունկցիայի գրաֆիկի x_0 աբսցիսով կետի օրդինատին: Դրա համար էլ $y=f(ax)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ նրա բոլոր կետերի աբսցիսները բաժանելով a–ի վրա: Այլ կերպ ասած՝ $f(ax)$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող է ստացվել*** $y=f(x)$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ օրդինատների առանցքի նկատմամբ սեղմումով*** a ***անգամ*** (կամ՝ Ox առանցքի երկայնքով՝ սեղմումով a անգամ): Այն դեպքում, երբ $0<a<1$, ապա ***«սեղմում*** a ***անգամ»*** դարձվածքի փոխարեն հարմար է գործածել ***«ձգում*** $\frac{1}{a}$ ***անգամ»*** դարձվածքը: 9–րդ ա) և բ) նկարներում պատկերված են $f(2x)$ և $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Օրինակ 6: $y=\{0,5x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=\{x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ օրդինատների առանցքի նկատմամբ ձգումով 2 անգամ (նկ. 10), իսկ $y=\{2x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ օրդինատների առանցքի նկատմամբ սեղմումով 2 անգամ (նկ. 11):

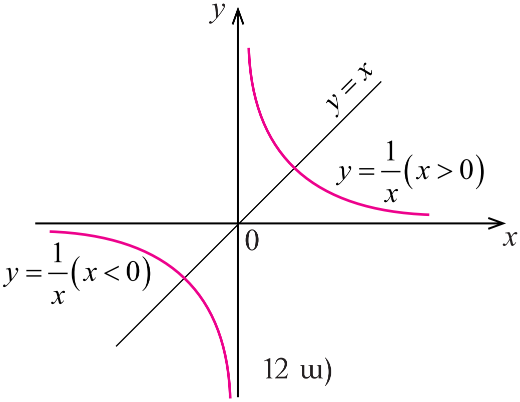


Նկ. 10



Նկ. 11

$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան կենտ է և $(0;\ \infty)$ միջակայքում նվազում է՝ ընդունելով դրական արժեքներ: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $y=x$ ուղղի նկատմամբ (ինչու՞), այնուհետև որոշ լրացուցիչ պարզ դատողություններից հետո հեշտությամբ կարելի է կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 12, ա):



12 ա)

$$y=\frac{k}{x}=k\cdot\frac{1}{x}\ \ (k>0,\ k\neq 1)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ ձգում Oy առանցքի երկայնքով k անգամ:

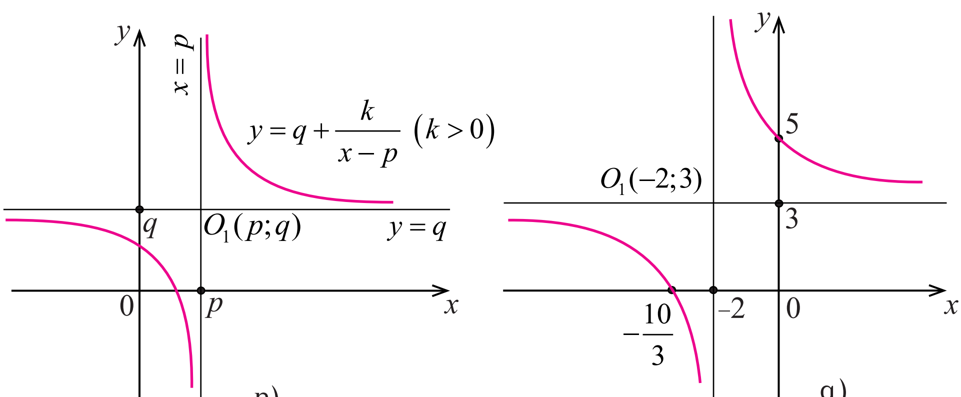
Այժմ դիտարկենք՝

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$

տեսքի ֆունկցիան, որն անվանում են ***կոտորակա-գծային*** ֆունկցիա: Եթե $c=0$ և $d\neq 0$, ապա այն վերածվում է $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ գծային ֆունկցիայի, որի գրաֆիկն ուղիղ է:

Իսկ եթե $c\neq 0$ և $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, ապա այդ ֆունկցիան բոլոր իրական $x\neq -\dfrac{d}{c}$ թվերի դեպքում հաստատուն է՝

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}:$$



Նկ. 12

Այս դեպքում ևս նրա գրաֆիկն ուղիղ է՝ առանց $-\frac{d}{c}$ աբսցիսով կետի:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $c \neq 0$ և $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$:

Այս պայմաններով (1) ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նպատակահարմար է կոտորակից անջատել ամբողջ և կոտորակային մասերը: Դրա համար բավական է $ax+b$ բազմանդամը «անկյունաձև» բաժանել $cx+d$ բազմանդամի վրա: Արդյունքում կունենանք՝

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc=ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}:$$

Նշանակենք՝ $-\frac{d}{c}=p,\quad \frac{a}{c}=q,\quad \frac{bc-ad}{c^2}=k:$

Դրանով իսկ (1) կոտորակագծային ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$f(x)=q+\frac{k}{x-p}: \qquad (2)$$

Այս տեսքից պարզ երևում է, որ ֆունկցիայի որոնելի գրաֆիկը կստացվի նկ. 12 ա-ում պատկերված $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ հետևյալ հաջորդականությամբ՝

ա) $y=\frac{k}{x}$, բ) $y=\frac{k}{x-p}$, գ) $f(x)=q+\frac{k}{x-p}$,

որոնցից յուրաքանչյուրի կառուցումն արդեն դժվարություն չի ներկայացնի:

Նկատենք, որ (2) (ուստի նաև՝ (1)) ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ $(p;\ q)$ կոորդինատներ ունեցող վեկտորով զուգահեռ տեղափոխմամբ (նկ. 12 բ.):

$c \neq 0$, $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ դեպքում կոտորակա-գծային (1) ֆունկցիայի գրաֆիկը կոչվում է ***հիպերբոլ***, իսկ $0_1\left(-\frac{b}{c};\frac{a}{c}\right)$ կետը՝ նրա ***կենտրոն***: $x=-\frac{d}{c}$ ուղիղն անվանում են հիպերբոլի ***ուղղաձիգ ասիմպտոտ***: Հիպերբոլի կետերն անվերջորեն մոտենում են այդ ուղղին, երբ x-ը մոտենում է $-\frac{d}{c}$ արժեքին:

$y=\frac{a}{c}$ ուղիղն անվանում են հիպերբոլի ***հորիզոնական ասիմպտոտ***: Հիպերբոլի կետերն անվերջորեն մոտենում են այդ ուղղին, երբ x-ը մոդուլով անսահմանափակորեն մեծանում է:[1]

Օրինակ 7: Կառուցենք $y=\dfrac{3x+10}{x+2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Լուծում: Ունենք՝ $y=\dfrac{3x+10}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+4}{x+2}=3+\dfrac{4}{x+2}$:

Ունենալով $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, նրա միջոցով հերթականությամբ կկառուցենք՝

ա) $y=4\cdot f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ($\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ձգում՝ 4 գործակցով օրդինատների առանցքի երկայնքով):

բ) $y=4f(x+2)$ ($y=4f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ այն տեղափոխելով Ox առանցքին զուգահեռ՝ դեպի ձախ 2 միավորով),

գ) $y=4f(x+2)+3=\dfrac{3x+10}{x+2}$ ($y=4f(x+2)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ այն տեղափոխելով օրդինատների առանցքին զուգահեռ դեպի վեր 3 միավորով):

Արդյունքում կունենանք 12-ի գ) նկարում պատկերված գրաֆիկը:

Դիտողություն: *Նկարագրված ձևափոխությունների դեպքում Ox և Oy առանցքները փոխանցվում են համապատասխանաբար $y=3$ և $x=-2$ ուղիղների, իսկ կոորդինատների սկիզբը՝ $0_1(-2;3)$ կետին: Դրա համար էլ սկզբում գծում ենք նշված ուղիղները (որոնց անվերջորեն մոտենում է որոնելի գրաֆիկը), այնուհետև, մտովի պատկերացնելով, որ դրանք կոորդինատային $0_1x'$ և $0_1y'$ առանցքներն են, այդ $y'0_1x'$ «նոր համակարգում» կառուցում ենք $y'=\dfrac{3}{x'}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը $y0x$ կոորդինատային հարթության վրա կներկայացնի $y=\dfrac{3x+10}{x+2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:*

Հատկանշական է, որ այս եղանակով $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ կոտորակա-գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելիս կարելի է և չփոփոխել նրա անալիտիկ տեսքը: $a, b, c, d,$ գործակիցների միջոցով, մտապահման պարզ կանոնով, կարելի է կատարել $y=\dfrac{a}{c}$ և $x=-\dfrac{d}{c}$ ուղիղների, ինչպես նաև $k=\dfrac{bc-ad}{c^2}$ գործակցի ընտրությունը:

---

[1] *«x-ը մոտենում է p արժեքին», «$|x|$ -ը անսահմանափակորեն մեծանում է», «ասիմպտոտ» հասկացությունների իմաստներին խորությամբ կծանոթանանք հետագայում:*

Հարցեր

1. $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով ինչպե՞ս կարելի է ստանալ $y=f(x)+a$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
2. $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով ինչպե՞ս կարելի է ստանալ $y=-f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
3. $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով ինչպե՞ս կարելի է ստանալ $y=f(-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
4. $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով ինչպե՞ս կարելի է ստանալ $y=2f(a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
5. $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով ինչպե՞ս կարելի է ստանալ $y=f(2x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

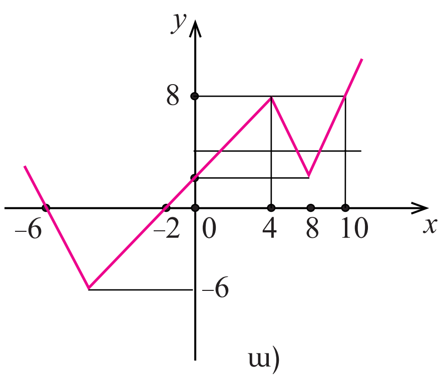
Առաջադրանքներ

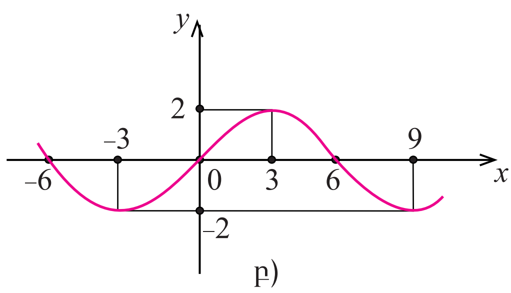
1. Ինչպե՞ս կառուցել $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

2. Նկ. 13 ա)-ում տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկների էսքիզները.

ա) $g(x)=f(x)+2$, բ) $g(x)=-f(x)$, գ) $g(x)=f(x-1)$,

դ) $g(x)=2f(x)$, ե) $g(x)=f(|x|)$, զ) $g(x)=|f(-x)|$:





Նկ. 13

3. Նկ. 13 բ)-ում տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկների էսքիզները.

ա) $g(x)=|f(x)|$, բ) $g(x)=f(2x)$,

գ) $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$, դ) $g(x)=-f(-|x|)$:

Ելնելով $y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկից, կառուցել հետևյալ ֆունկ-ցիաների գրաֆիկները (4, 5).

4. ա) $y=|x|+1$, բ) $y=|x-2|+3$, գ) $y=2|x-3|+1$:

5. ա) $y=2\left|\frac{x}{3}\right|$, բ) $y=|4-x|$, գ) $y=\left|5-|x|\right|$:

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (6–14).

6. ա) $y=x^2-6x+10$, բ) $y=2x^2-5x+3$:

7. ա) $y=1-x-x^2$, բ) $y=11-8x-6x^2$:

8. ա) $y=x^2+1$, բ) $y=x^2-2x$;

9. ա) $y=\frac{1}{x-3}$, բ) $y=\frac{4}{x+2}$;

10. ա) $y=|x^2-5x+6|$, բ) $y=x^2-4|x|$;

11. ա) $y=|x^2+2x|+3$, բ) $y=\left||x-3|+2x\right|$:

12. ա) $y=\frac{4x+5}{x-1}$, բ) $y=\frac{-4x+3}{x+1}$:

13. ա) $y=\left|\frac{x+4}{x-1}\right|$, բ) $y=\frac{|x|-4}{x+1}$:

14. ա) $y=\frac{1}{|x-2|+|x|}$, բ) $y=\left|\frac{3x+5}{4-|x|}\right|$:

15. Յուրաքանչյուր a իրական թվի դեպքում $f(x)=x^2+(a+1)x+a^2+1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է: Գտնել այդ բոլոր պարաբոլների գագաթների երկրաչափական տեղը: Ի՞նչ կոր է դա: Կատարել գծա-գիրը:

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերել բոլոր (x,y) կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են տրված պայմանին (16–21).

16. ա) $(x+1)(y-1)=0$; բ) $(3x-2y)(x+4y)=0$:

17. ա) $\dfrac{y-2x}{x+1}=0$; բ) $(y-x-1)(x^2+y^2)=0$:

18. ա) $|x|+|y|=1$; բ) $x+|x|=y+|y|$:

19. ա) $|y|=x^2-4x+3$; բ) $|y|=|x^2-4x|$:

20. ա) $|y|=\dfrac{x-2}{x-1}$; բ) $|y|=\dfrac{|x|-2}{|x|-1}$:

21. ա) $[x]=[y]$; բ) $\{x\}=\{y\}$: