ԳԼՈՒԽ 3

ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§ 1. ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿ

1. Փոփոխական մեծություններ, նրանց հատկությունները և գրաֆիկները

ա) Տրված հավասարությունը դիտարկենք որպես հավասարում x-ի նկատմամբ, որը բերվում է քառակուսային հավասարման՝

$$x^2-(y-2)x-(y-2)=0:$$

Նկատենք, որ $x=-1$ թիվը (որի դեպքում տրված ֆունկցիան որոշված չէ) չի կարող լինել ստացված քառակուսային հավասարման արմատ (տեղադրությամբ համոզվում ենք): Դժվար չէ հասկանալ, որ խնդրի պահանջն իրականացնելու համար բավական է ներկայացնել այդ հավասարման արմատի գոյության անհրաժեշտ ու բավարար պայմանը, այսինքն՝ պահանջել, որ դիսկրիմինանտը լինի ոչբացասական.

$$(y-2)^2+4(y-2)\geq 0:$$

Լուծելով այդ անհավասարումը, կստանանք՝ $y\in(-\infty;\,-2]\cup[2;\,\infty)$: Այդ բազմության յուրաքանչյուր y-ի համար գոյություն ունի x անկախ փոփոխականի այնպիսի արժեք, որը տեղադրելով ֆունկցիայի անալիտիկ արտահայտության մեջ՝ ստանում ենք y-ի նշված արժեքը: Այսպիսով,

$$E(y)=(-\infty;\,-2]\cup[2;\,\infty):$$

բ) ***Առաջին եղանակ:*** Արմատատակ գտնվող քառակուսային եռանդամից անջատենք երկանդամի քառակուսի՝

$$y=\sqrt{9-3(x-2)^2}:$$

Դժվար չէ նկատել, որ ցանկացած թույլատրելի x-ի $\left(x\in D(f)\right)$ դեպքում՝

$$0 \le \sqrt{9-3(x-2)^2} \le 3:$$

Ստացվում է, որ y–ի արժեքների բազմությունը պատկանում է $[0;3]$ հատվածին: Ցույց տանք, որ այն համընկնում է $[0;3]$ հատվածի հետ, այսինքն՝ $E(y)=[0;3]$: Դրա համար բավական է հիմնավորել հետևյալ պնդումը՝ $[0;3]$ հատվածի ցանկացած b թվի համար գոյություն ունի x–ի այնպիսի արժեք, որ $\sqrt{9-3(x-3)^2}=b$: Իրոք, վերջին հավասարումը համարժեք է $9-3(x-3)^2=b^2$ հավասարմանը, որտեղից կունենանք՝

$$(x-3)^2=\frac{9-b^2}{3}:$$

Քանի որ $0 \le b \le 3$ պայմանով $\frac{9-b^2}{3} \ge 0$, ուստի ստացված հավասարումն ունի արմատ (օրինակ՝ $x=3+\sqrt{\frac{9-b^2}{3}}$): Հետևաբար, կարող ենք գրել՝ $E(y)=[0;3]$

Երկրորդ եղանակ: Նկատելով, որ $y \ge 0$, $y=\sqrt{-3x^2+12x-3}$ հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի, այն կարող ենք դիտարկել որպես քառակուսային հավասարում x–ի նկատմամբ՝

$$3x^2-12x+y^2+3=0:$$

Պահանջենք, որ այն արմատ ունենա.

$$\frac{D}{4}=27-3y^2 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 \le 9 \Leftrightarrow -3 \le y \le 3:$$

Քանի որ $y \ge 0$, կստանանք՝ $0 \le y \le 3$: $[0;\ 3]$ հատվածի ինչպիսի y էլ վերցնենք, դրան համապատասխան գոյություն ունի այնպիսի x, որը նշված քառակուսային հավասարման, ուստի նաև նրան համարժեք $\sqrt{-3x^2+12x-3}=y$ հավասարման արմատն է: Նշանակում է՝ $E(y)=[0;\ 3]$: