

**ԱՄԲՈՂՁ ՅՈՒՑԻՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ
ՄԻԱՆԴԱՄՆԵՐ ԵՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ
ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ**

**§ 5. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ ԵՎ
ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏ**

**Ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական
ձևափոխություններ**

Դուք արդեն ծանոթ եք հանրահաշվական կոտորակների գումարման և հանման կանոններին, որոնք կիրառելիս, ըստ էության, համապատասխան կոտորակները բերվում են ընդհանուր հայտարարի. որպես այդպիսին՝ ընդունելով տվյալ կոտորակների հայտարարների արտադրյալը: Այն առանձնահատուկ դեպքերում, երբ այդ հայտարարներն ունեն հաստատունից տարբեր ընդհանուր արտադրիչ, վերոնշյալ գործողություններն ավելի պարզեցված ու հեշտությամբ կարելի է իրագործել:

Օրինակ, $\frac{a}{a^2 + ab}$ և $\frac{b}{a^2 - b^2}$ կոտորակների հայտարարներն արտադրիչների վերածելիս կունենանք ընդհանուր արտադրիչ: Իրոք.

$$a^2 + ab = a(a + b), \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b):$$

Տրված կոտորակները ներկայացնելով

$$\frac{a}{a(a + b)} \text{ և } \frac{b}{(a - b)(a + b)}$$

տեսքով, այնուհետև, օգտվելով կոտորակի հիմնական հատկությունից կարող ենք դրանք բերել ընդհանուր հայտարարի.

$$\frac{a}{a(a + b)} = \frac{a(a - b)}{a(a + b)(a - b)}, \quad \frac{b}{(a - b)(a + b)} = \frac{ba}{a(a - b)(a + b)}:$$

Ելնելով վերոնշյալ նկատառումներից՝ գումարենք տրված կոտորակները.

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+ab} &= \frac{b}{a^2-b^2} = \frac{a(a-b)}{a(a+b)(a-b)} + \frac{ba}{a(a-b)(a+b)} = \frac{a(a-b)+ba}{a(a-b)(a+b)} = \\ &= \frac{a^2}{a(a-b)(a+b)} = \frac{a}{(a-b)(a+b)} = \frac{a}{a^2-b^2}: \end{aligned}$$

Ընդհանրապես, եթե $\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{D}$ հանրահաշվական կոտորակներն այնպիսին են, որ նրանց B և D հայտարարներն ունեն փոփոխական պարունակող ընդհանուր արտադրիչ, ասենք՝

$$B = E \cdot F, \quad D = E \cdot G,$$

որտեղ E -ն փոփոխական պարունակող որևէ բազմանդամ է, իսկ F և G արտահայտություններն արդեն չունեն փոփոխականով ընդհանուր արտադրիչ, կունենանք՝

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{E \cdot F} = \frac{A \cdot G}{E \cdot F \cdot G}, \quad \frac{C}{D} = \frac{C}{E \cdot G} = \frac{C \cdot F}{E \cdot F \cdot G}:$$

Ըտևաբար, տրված կոտորակների ընդհանուր հայտարարը կլինի $E \cdot F \cdot G$ արտահայտությունը, որն ավելի պարզ տեսք ունի, քան $B \cdot D$ արտադրյալը (այսինքն՝ $E^2 \cdot F \cdot G$ արտահայտությունը):

Ըտևաբար, հանրահաշվական կոտորակները գումարելիս կամ հանելիս նախապես նրանց հայտարարները վերածվում են արտադրիչների (եթե, իհարկե, հնարավոր է): Կոտորակների համարիչները կարելի է վերածել արտադրիչների միայն այն դեպքում, երբ հնարավոր կլինի դրանք կրճատել:

Օրինակ 1. Ռացիոնալ արտահայտությունը ձևափոխենք հանրահաշվական կոտորակի.

$$\frac{a^2}{a^2+4a+4} - \frac{2a-5}{2a+4}:$$

Լուծում: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2+4a+4} - \frac{2a-5}{2a+4} &= \frac{a^2}{(a+2)^2} - \frac{2a-5}{2(a+2)} = \frac{2a^2}{2(a+2)^2} - \frac{(2a-5)(a+2)}{2(a+2)^2} = \\ &= \frac{2a^2 - (2a-5)(a+2)}{2(a+2)^2} = \frac{2a^2 - 2a^2 + a + 10}{2(a+2)^2} = \frac{a+10}{2(a+2)^2}: \end{aligned}$$

Օրինակ 2. Պարզեցնենք ռացիոնալ արտահայտությունը.

$$(p^2-4) \cdot \left(\frac{p}{p^2-4} + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p+2} \right):$$

Լուծում: Սկզբում գումարենք երկրորդ փակագծում գտնվող հանրահաշվական կոտորակները՝ նախապես դրանք բերելով ընդհանուր հայտարարի.

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^2-4} + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p+2} &= \frac{p}{(p-2)(p+2)} + \frac{p+2}{(p-2)(p+2)} + \frac{p-2}{(p-2)(p+2)} = \\ &= \frac{p+(p+2)+(p-2)}{(p-2)(p+2)} = \frac{3p}{(p-2)(p+2)} = \frac{3p}{p^2-4}: \end{aligned}$$

Մնում է առաջին փակագծի արտահայտությունը բազմապատկել ստացված արտահայտությամբ.

$$(p^2-4) \cdot \frac{3p}{p^2-4} = 3p:$$

Պատասխան՝ $3p$:

Օրինակ 3. Ապացուցենք նույնությունը.

$$\left(m+n - \frac{4mn}{m+n}\right) : \left(\frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2}\right) = m-n:$$

Լուծում: Հավասարության ձախ մասի հետ կատարելով նույնական ձևափոխություններ՝ համոզվենք, որ պարզեցումներից հետո կհանգենք աջ մասի արտահայտությանը:

Առաջին հերթին առաջին փակագծի արտահայտությունը ներկայացնենք հանրահաշվական կոտորակի տեսքով.

$$\begin{aligned} m+n - \frac{4mn}{m+n} &= \frac{m+n}{1} - \frac{4mn}{m+n} = \frac{(m+n)^2}{m+n} - \frac{4mn}{m+n} = \\ &= \frac{(m+n)^2 - 4mn}{m+n} = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn}{m+n} = \\ &= \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m+n} = \frac{(m-n)^2}{m+n}: \end{aligned}$$

Այժմ ձևափոխենք երկրորդ փակագծի արտահայտությունը՝ այն բերելով հանրահաշվական մեկ կոտորակի տեսքի.

$$\begin{aligned} \frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2} &= \frac{m(m-n) + n(m+n) - 2mn}{(m-n)(m+n)} = \\ &= \frac{m^2 - mn + nm + n^2 - 2mn}{(m-n)(m+n)} = \frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)} = \frac{m-n}{m+n}: \end{aligned}$$

Մնում է առաջին փակագծի արտահայտության նույնական ձևափո-

խոթյամբ ստացված արդյունքը բաժանել վերջին արտահայտության վրա.

$$\frac{(m-n)^2}{m+n} : \frac{m-n}{m+n} = \frac{(m-n)^2 \cdot (m+n)}{(m+n)(m-n)} = m-n:$$

Ստացվեց տրված հավասարության աջ մասի արտահայտությունը: Հետևաբար, նույնությունն ապացուցված է:



Հարցեր և առաջադրանքներ

1. Վերհիշել գումարի և տարբերության քառակուսիների բանաձևերը:
2. Վերհիշել գումարի և տարբերության խորանարդների բանաձևերը:
3. Վերհիշել քառակուսիների տարբերությունն արտադրիչների վերածելու բանաձևերը:
4. Վերհիշել խորանարդների գումարն արտադրիչների վերածելու բանաձևերը:
5. Վերհիշել խորանարդների տարբերությունն արտադրիչների վերածելու բանաձևերը:

Ռացիոնալ արտահայտությունը ներկայացնել հանրահաշվական կոտորակի տեսքով (6–13).

- | | |
|---|--|
| 6. $\frac{b}{b-a} + \frac{a^2}{ab-b^2}:$ | 7. $\frac{b}{2a^2-ab} - \frac{4a}{2ab-b^2}:$ |
| 8. $\frac{1}{p^2+pq} + \frac{1}{pq+q^2}:$ | 9. $\frac{b^2-4bc}{2c^2-bc} - \frac{4c}{b-2c}:$ |
| 10. $\frac{15a^5}{4b^2} \cdot \frac{8b^8}{5a^4}:$ | 11. $\frac{12x^{-2}}{5y^3} \cdot \frac{25x^4}{4y^{-7}}:$ |
| 12. $\frac{6x^2}{5y} : \frac{3x}{10y^3}:$ | 13. $\frac{6a^2b^3}{11c^4} : \frac{3a^4}{55c^5b^{-3}}:$ |

Ռացիոնալ ամբողջ արտահայտությունը վերածել արտադրիչների (14–29).

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| 14. $(a-b)^2 - 5(b-a):$ | 15. $a^3b - b^3a:$ |
| 16. $(a+b+c)^2 - a - b - c:$ | 17. $4a^3 - a:$ |
| 18. $a^3 - 2a^2 + a:$ | 19. $a^2 - 3ab - 5a + 15b:$ |
| 20. $a^3 + a^2 - a - 1:$ | 21. $a^4b + b^4a - a^3 - b^3:$ |
| 22. $2b^3 + bc^2 - 2b^2c - c^3:$ | 23. $(4c^2 - b^2)^2 - 9b^4:$ |

24. $4b^3c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$: 25. $b^2 - c^2 - 8b + 16$:

26. $x^3 + y^3 + x + y$: 27. $a^4 + 4a^2 - 5$:

28. $a^4 - 18a^2 + 81$: 29. $a^5 + a^3 - a^2 - 1$:

Հանրահաշվական կոտորակի համարիչը և հայտարարը վերածելով արտադրիչների՝ կրճատել այն (30-41).

30. $\frac{a^2 - 25}{a - 5}$: 31. $\frac{9a^2 - 49}{3a + 7}$: 32. $\frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 - 3a}$:

33. $\frac{4 - a^2}{2a + a^2}$: 34. $\frac{9a^2 - 6a + 1}{1 - 3a}$: 35. $\frac{a^3 + 8}{a^3 - 2a^2 + 4a}$:

36. $\frac{a^4 - a}{a^2 + a + 1}$: 37. $\frac{a^4b - b^4a}{a^2b - ab^2}$: 38. $\frac{a^7 - a^3}{a^5 + a^3}$:

39. $\frac{a^7 - a^4}{a^4 - a}$: 40. $\frac{1 + a + a^2 + a^3}{1 + a^2}$: 41. $\frac{a^4b - ab^4}{(a + b)^2 - ab}$:

Պարզեցնել ռացիոնալ արտահայտությունը (42-51).

42. $(2a - 3)^2 - 12a - 9$: 43. $a(0,5 - a)^2 - a^3 + a^2 + 0,75a$:

44. $\frac{a^2 - 4a + 4}{2 - a} - \frac{(a - 3)^2}{3 - a}$: 45. $\left(a - \frac{a^2 + b^2}{a + b}\right) \cdot \left(b^{-1} + \frac{2}{a - b}\right)$:

46. $\left((1 - y)^{-1} - y\right) : \frac{y^2 - y + 1}{y^2 - 2y + 1}$: 47. $\frac{bx + 3b}{x^2 - 25} \cdot \frac{(x - 5)^2}{ax + 3a}$:

48. $\frac{3m^2 - 3n^2}{m^2 + mp} : \frac{6m - 6n}{p + m}$: 49. $\frac{m^2 + 6m + 9}{2x^2y} : \frac{am + 3a}{4xy}$:

50. $\frac{x + y}{2xy - y^2} \cdot \left(x + y - \frac{x^2}{x + y}\right)$: 51. $\frac{x^3 + y^3}{x + y} \cdot (x^2 - y^2)^{-1} + \frac{2y}{x + y} - \frac{xy}{x^2 - y^2}$:

Գտնել ռացիոնալ արտահայտության արժեքը (52-55).

52. $a^2 + b^2 - 2ab - a + b$, եթե $a = 97,25$, $b = 99,25$:

53. $\frac{3}{a - 1} + \frac{-6}{a^2 - 1}$, եթե $a = 1999$:

54. $\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{3x - 4}{3x + 3}$, եթե $x = 19$:

55. $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2}$, եթե $x = 0,05$, $y = 13\frac{14}{15}$:

Ապացուցել նույնությունը (56-63).

$$56. \frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4} = \frac{16a}{a^2-16}:$$

$$57. \left(\frac{c-6}{c+6} + \frac{c+6}{c-6} \right) : \frac{c^2+36}{c^2-36} = 2:$$

$$58. \left(b-8 + \frac{64}{b+8} \right) \cdot \frac{b+8}{b^2} = 1:$$

$$59. \frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1} = \frac{a^4+1}{a+1}:$$

$$60. \frac{a^3+6a^2+12a+8}{a^2+4a+4} = a+2:$$

$$61. \frac{8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3}{4a^2b+4ab^2+b^3} = \frac{2a+b}{b}:$$

$$62. \left(\frac{b}{b^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab} \right) \cdot \frac{ab}{b^2-2ab+a^2} = (a+b)^{-1}:$$

$$63. \frac{a^2}{3+a} \cdot \frac{9-a^2}{a^2-3a} + \frac{27+a^3}{3-a} : \frac{a^2-3a+9}{3-a} = 3:$$

$$64. \text{Կարելի է պնդել, որ եթե } a + \frac{1}{a} = 4, \text{ ապա } a^2 + \frac{1}{a^2} = 16:$$

65. Նույնությունն է արդյոք հավասարությունը.

$$\text{ա) } (a+b)^4 = a^4 + b^4, \quad \text{բ) } \left(a + \frac{4}{a} \right)^2 - 8 = a^2 + \frac{16}{a^2}:$$

66*. Հայտնի է, որ $x + \frac{1}{x} = 5$: Չգտնելով x -ի արժեքը՝ գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\text{ա) } x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \text{բ) } x^3 + \frac{1}{x^3}, \quad \text{գ) } x^4 + \frac{1}{x^4}:$$

67*. Հայտնի է, որ $a+b+c=0$ և $abc=100$: Գտնել $(a+b)(b+c)(c+a)$ արտահայտության արժեքը:

68*. Ապացուցել, որ եթե $a+b+c=0$, ապա $a^3+b^3+c^3=3abc$:

69. Հայտնի է, որ $a+b=10$ և $ab=23$: Չգտնելով a -ի և b -ի արժեքները՝ գտնել. ա) a^2+b^2 արտահայտության արժեքը, բ)* a^3+b^3 արտահայտության արժեքը:



Հերաքրքրաշարժ և փրամաքանական խնդիրներ

1. Երկու միատեսակ փարաներից առաջինում լցված է սպիրտ, իսկ երկրորդում՝ նույն ծավալով ջուր (ոչ լրիվ): Առաջին փարայից վերցնում են մեկ լիտր սպիրտ և այն լցնում են ջուր պարունակող փարայի մեջ: Երկրորդի պարունակությունը լավ խառնելուց հետո նրանից վերցնում են 1 լ խառնուրդ և լցնում առաջին փարայի մեջ: Ո՞րն է ավելի շատ ջուրը առաջին փարայում, թե՞ սպիրտը երկրորդում:
2. Քանի ուղղանկյուն կարելի է առանձնացնել բերված պարկերում:
