ԳԼՈՒԽ 2

ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐ ԵՎ ԱՐՄԱՏՆԵՐ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 2. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ռացիոնալ արտահայտությունների ձևափոխություններ

Ինչպես արդեն գիտեք, ռացիոնալ արտահայտություններն ամբողջ և կոտորակային հանրահաշվական արտահայտությունների միավորումն է: Արտահայտությունների մեջ հատուկ տեղ են զբաղեցնում միանդամները և բազմանդամները, որոնց հետ հաճախ եք առնչվել միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում: Վերհիշենք այդ հասկացությունները:

Թվային բազմապատկիչների և փոփոխականների բնական աստիճանների արտադրյալն անվանում են ***միանդամ:***

Միանդամը ստանդարտ տեսքի բերելու համար բազմապատկում են միանդամի մեջ մտնող բոլոր թվային բազմապատկիչները, իսկ միևնույն փոփոխականների (կամ նրանց աստիճանների) արտադրյալները փոխարինում են այդ փոփոխականի աստիճանով: Թվային բազմապատկիչն անվանում են միանդամի ***գործակից:*** Փոփոխականների աստիճանացույցերի գումարն անվանում են միանդամի ***աստիճան:***

Օրինակ, $5xy\cdot 2x^2z\cdot(-y)$արտահայտությունը *x, y, z* փոփոխականների նկատմամբ միանդամ է: Նրա ստանդարտ տեսքն է՝ $-10x^3yz$, որը –10 գործակցով 5-րդ աստիճանի միանդամ է:

Բազմանդամ անվանում են միանդամների գումարը: Բազմանդամը ստանդարտ տեսքի բերելու համար նրա մեջ մտնող յուրաքանչյուր միանդամ փոխարինում են ստանդարտ տեսքի միանդամով և նման անդամները միացնում:

Բազմանդամի աստիճան անվանում են բազմանդամը ստանդարտ տեսքի բերելուց հետո բազմանդամը կազմող միանդամների աստիճաններից ամենամեծը:

Օրինակ, $3axa^2y-5a^2ybxy^2+4a^2xya+axaby^3$ բազմանդամի ստանդարտ տեսքն է՝ $7a^3xy-4a^2bxy^3$, իսկ նրա աստիճանը հավասար է 7-ի:

Բազմանդամներն անվանում են նաև ***հանրահաշվական ամբողջ*** արտահայտություններ կամ ***ամբողջ ռացիոնալ*** արտահայտություններ:

Հանրահաշվական ամբողջ արտահայտությունների նույնական ձևափոխությունները հիմնված են (Գլ. I-ի § 2-ի կ.1-ի 1) – 7) և 9)) հատկությունների վրա: Այդ հատկություններից բխում են արտահայտությունների նույնական ձևափոխությունների հետևյալ բանաձևերը.

1) $A+B=B+A$; 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3) $A+0=A$; 4) $A+(-A)=0$;

5) $AB=BA$; 6) $(AB)C=A(BC)$;

7) $A\cdot 1=A$; 8) $A(B+C)=AB+AC$;

որտեղ A-ն և B-ն հանրահաշվական ամբողջ արտահայտություններ են:

Նույնական ձևափոխությունների բանաձևեր են նաև աստիճանների և մոդուլների վերաբերյալ հետևյալ բանաձևերը.

9) $(AB)^n=A^nB^n$; 10) $A^mA^n=A^{m+n}$;

11) $(A^m)^n=A^{mn}$; 12) $\dfrac{A^m}{A^n}=\begin{cases}A^{m-n}, & \text{եթե} \quad m>n,\\ 1, & \text{եթե} \quad m=n,\ A\neq 0;\end{cases}$

13) $|AB|=|A||B|$; 14) $|A^n|=|A|^n$:

Արտահայտությունները ձևափոխելիս հաճախ են կիրառվում կրճատ բազմապատկման հետևյալ բանաձևերը.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3, \quad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3,$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2):$$

Օրինակ 1: Հայտնի է, որ $x+\dfrac{1}{x}=10$: Չգտնելով x-ի արժեքը՝ գտնենք.

ա) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, բ) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ արտահայտությունների արժեքները:

Լուծում: Ունենք.

ա) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=10^2-2=98,$

բ) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=1000-3\cdot 10=970:$

Այստեղ օգտվեցինք $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ և $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ նույնություններից:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ ցանկացած *x, y, z* ամբողջ թվերի դեպքում $x^3+y^3+z^3-3xyz$ արտահայտությունը բաժանվում է $(x+y+z)$-ի:

Լուծում: Օգտվելով $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ նույնությունից, տրված արտահայտությունը վերածենք բազմապատկիչների.

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz=((x+y)^3+z^3)-$$
$$-3xy(x+y+z)=(x+y+z)^3-3z(x+y)(x+y+z)-3xy(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)((x+y+z)^2-3zx-3zy-3xy)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx):$$

Վերջին արտահայտությունն էլ ամբողջ *x, y, z* արժեքների դեպքում, ակնհայտորեն, $(x+y+z)$-ի բազմապատիկ է: Նշենք, որ ստացված արտահայտությունը տրված արտահայտությունը բազմապատկիչների վերածելու վերջնական տեսքն է (ինչո՞ւ):

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ հավասարությունից հետևում է

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

հավասարությունը:

Լուծում: Նշանակենք՝ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\lambda$, որտեղից՝ $x=\lambda a,\ y=\lambda b,\ z=\lambda c:$

Այդ դեպքում՝ $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\lambda^3a+\lambda^3b+\lambda^3c=\lambda^3(a+b+c):$

Մյուս կողմից՝ $\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)}=\frac{\lambda(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=\lambda^3(a+b+c):$

Ստացված հավասարություններից էլ հետևում է ապացուցվելիք հավասարությունը:

Օրինակ 4: Ապացուցեք նույնությունը՝

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca:$$

Լուծում: Ձևափոխենք հավասարության ձախ մասի արտահայտությունը.

$$(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca:$$

Սկզբում օգտվեցինք երկու թվերի գումարի քառակուսու բանաձևից՝ այն կիրառելով $a+b$ և c թվերի համար: Նույնական ձևափոխություններից հետո ստացանք ապացուցվելիք հավասարության աջ մասի արտահայտությունը: Դրանով էլ նույնությունն ապացուցված է:

Օրինակ 5: Ապացուցեք, որ եթե

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = t,$$

ապա $\frac{x+y}{a+b} = t \quad (a \neq -b):$

Լուծում: Տրված պայմաններից հետևում են՝

$$x = at \text{ և } y = bt:$$

Հետևաբար,

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{at+bt}{a+b} = \frac{t(a+b)}{a+b} = t:$$

Օրինակ 6: Հետևյալ հավասարություններից արտաքսենք x-ը և y-ը.

$$a = x^2 - y^2, \ b = 2xy, \ c = x^2 + y^2:$$

Լուծում: Ըստ խնդրի, անհրաժեշտ է գտնել առնչություն a-ի, b-ի և c-ի միջև:

Առաջին և երրորդ հավասարություններից կունենանք՝

$$c + a = 2x^2 \text{ և } c - a = 2y^2:$$

Բազմապատկելով այդ հավասարությունները՝ կստանանք.

$$c^2 - a^2 = (2xy)^2:$$

Քանի որ $2xy = b$, ուստի կստանանք՝ $c^2 - a^2 = b^2$:

Ստացված հավասարությունն էլ կապ է հաստատում միայն a, b, c փոփոխականների միջև (x և y փոփոխականներից և ոչ մեկը չի մասնակցում)։

Օրինակ 7: Ապացուցենք հետևյալ նույնությունը՝

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2 \text{ :}$$

Լուծում: Ձևափոխենք ապացուցվելիք հավասարության ձախ և աջ մասերն առանձին-առանձին՝ նրանցից յուրաքանչյուրում կատարելով նույնական ձևափոխություններ.

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+$$
$$b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2axby+2axcz$$
$$+2bycz)=a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2axby-2axcz-2bycz \text{ :}$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք նաև

$$(u+v+t)^2=u^2+v^2+t^2+2uv+2ut+2vt \qquad (1)$$

բանաձևից: Այնուհետև,

$$(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=$$
$$=b^2x^2-2bxay+a^2y^2+c^2y^2-2cybz+b^2z^2+a^2z^2-2azcx+c^2x^2=$$
$$=a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2axby-2axcz-2bycz \text{ :}$$

Աջ և ձախ մասերի նույնական ձևափոխություններից հետո ստացանք միևնույն արտահայտությունը: Նույնությունն ապացուցված է:

Օրինակ 8: Վերածենք բազմապատկիչների՝

$$p^4-16p^2+100 \text{ :}$$

Լուծում: Եթե տրված արտահայտությունը դիտարկենք իբրև p^2 մեծության նկատմամբ քառակուսային եռանդամ և փորձենք կիրառել եռանդամը բազմապատկիչների վերածելու բանաձևը, ապա արդյունքի չենք հասնի, քանի որ այդ եռանդամի տարբերիչը բացասական է: Վարվենք այլ կերպ:

Նկատենք, որ $p^4+100=(p^2)^2+10^2$: Այս գումարը լրացնելով մինչև լրիվ քառակուսի, տրված արտահայտությունը կձևափոխենք այսպես.

$$p^4-16p^2+100=(p^4+20p^2+100)-36p^2=(p^2+10)^2-(6p)^2=$$
$$=(p^2-6p+10)(p^2+6p+10) \text{ :}$$

Դրանով իսկ բազմապատկիչների վերածումն ավարտված է, քանի որ $p^2-6p+10$ և $p^2+6p+10$ եռանդամների տարբերիչները բացասական են:

Օրինակ 9: Ապացուցենք, որ եթե $a+b+c=0$, ապա

$$A=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9:$$

Լուծում: Ներմուծենք նոր փոփոխականներ.

$$\frac{a-b}{c}=x, \qquad \frac{b-c}{a}=y, \qquad \frac{c-a}{b}=z \ :$$

Այդ դեպքում ապացուցվելիք հավասարության ձախ մասը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$A=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}:$$

Ունենք՝

$$\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-a^2-c(b-a)}{ab}=$$

$$=\frac{c}{ab}(-a-b+c)=\frac{c}{ab}(-a-b-c+2c)=\frac{2c^2}{ab}, \text{ քանի որ } a+b+c=0:$$

Նույն ձևով կունենանք՝

$$\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}, \qquad \frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac} \ :$$

Հետևաբար,

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right):$$

Մյուս կողմից՝ $a+b+c=0$ պայմանով կունենանք՝

$$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3=(-c)^3-3ab(-c)+c^2=3abc:$$

Նշանակում է՝

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=6:$$

Այսպիսով՝ $A=3+6=9$, որն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Հարցեր

1. Ինչն են անվանում միանդամ:
2. Ինչն են անվանում բազմանդամ:
3. Ինչն են անվանում բազմանդամի աստիճան:
4. Ձևակերպել կրճատ բազմապատկման բանաձևերը:

Առաջադրանքներ

Ապացուցել նույնությունը (1–3).

1. $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}:$$

2. $$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}:$$

3. $$a^2\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}=d^2:$$

4. Ապացուցել, որ եթե $x^2+y^2+z^2=xy+yz+xz$, ապա $x=y=z$:

5. Ապացուցել, որ եթե $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$, ապա $a=b=c=d$:

Վերածել բազմապատկիչների (6–16).

6. a^4-1:

7. a^4-18a^2+81:

8. $a^5+a^3-a^2-1$:

9. a^4+a^2+1:

10. a^6-1:

11. a^6+1:

12. $a^{12}-2a^6+1$:

13. a^3+a-2:

14. a^3+5a^2+3a-9:

15. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$:

16. $(a^2+a+3)(a^2+a+4)-12$:

17. Կրճատել կոտորակը.

ա) $\dfrac{a^2+a-2}{a^3-1}$;

գ) $\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1}$;

դ) $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6}$;

ե) $\dfrac{a^3+a-10}{a^2-4}$;

18. Հայտնի է, որ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}=5$: Ինչի՞ է հավասար $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$ արտահայտության արժեքը:

Պարզեցնել արտահայտությունը (19–22).

19. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$:

20. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$:

21. $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}$:

22. $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}$:

23. Ապացուցել, որ իրար հաջորդող չորս ամբողջ թվերի արտադրյալը 1-ով մեծացրած լրիվ քառակուսի է (ամբողջ թվի քառակուսին անվանում են ***լրիվ քառակուսի***):

24. Ապացուցել, որ եթե երկու ամբողջ թվերից յուրաքանչյուրը ներկայացվում է երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով, ապա դրանց արտադրյալը նույնպես կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով:

25. Ապացուցել, որ եթե $a+b+c=0$, ապա.

ա) $a^3+b^3+c^3=3abc$:

բ)* $2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$:

26. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում.

ա) $a^n+1=(a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1\right)$,

բ) $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$:

27. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում.

ա) $a^n+1=(a+1)\left(a^{n-1}-a^{n-2}+\ldots+a^2-a+1\right)$,

բ) $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$:

28. Արտածել բանաձև.

ա) չորս թվերի գումարի քառակուսու համար,

բ) n թվերի գումարի քառակուսու համար:

29. Ապացուցել, որ եթե $\frac{x}{y}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ և $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, ապա $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$:

30. Ապացուցել, որ եթե $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, ապա

$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$, որտեղ n-ը բնական կենտ թիվ է:

31. Ապացուցել, որ $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(ax+by+cz\right)^2$ հավասարությունը, որտեղ $xyz\neq 0$, ճիշտ է միայն այն դեպքում, երբ $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$:

32. Ստորև բերված չորս հավասարություններից միայն մեկն է, որը նույնություն չէ: Ո՞րն է այդ հավասարությունը.

1) $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=(x-y)(z-x)(z-y)$,

2) $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4=$

$=(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$,

3) $\frac{x^3+y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2}=\frac{x+y+z}{2}$,

4) $\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)}=x+y+z$:

33. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)$;

բ) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$;

գ) $(p^2+p+1)(p^2-p+1)(p^2+\sqrt{3}p+1)(p^2-\sqrt{3}p+1)$:

Վերածել բազմապատկիչների (34–45).

34. a^4+2a^3-2a-1:

35. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$:

36. $a^4+a^2b^2+b^4$:

37. a^8+a^4+1:

38. a^4+b^4:

39. a^4+4a^2-5:

40. $2a^4+a^3+4a^2+a+2$:

41. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$:

42. $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)$:

43. $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$:

44. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$:

45. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$:

46. Կրճատել կոտորակը.

ա) $\dfrac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$; բ) $\dfrac{8a^3+12a^2b+6ab^2+1}{4a^2b+4ab^2+b^3}$:

Պարզեցնել արտահայտությունը (47–49).

47. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$:

48. $\dfrac{a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3}{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2}$:

49. $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\ldots+\dfrac{1}{(a+n-1)\,(a+n)}$:

50. Ապացուցել, որ եթե $ad-bc=1$, ապա $a^2+b^2+c^2+d^2\neq 1$, որտեղ a, b, c, d-ն իրական թվեր են:

51. Ապացուցել, որ եթե

$a^3+pa+q=0,\ b^3+pb+q=0,\ c^3+pc+q=0,\ a\neq b,\ a\neq c,\ b\neq c$,

ապա $a+b+c=0$:

52*. Ապացուցել, որ եթե $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, ապա

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0:$$

53. x-ն ու y-ը չգտնելով առանձին-առանձին, հաշվել x^3y+xy^3 գումարը, եթե

$$x-y=4 \text{ և } xy=3:$$

54. Հայտնի է, որ $x+\dfrac{1}{x}=p$: Գտնել՝

ա) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, բ) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$:

55. $x+\dfrac{1}{x}=p$ և $x^4+\dfrac{1}{x^4}=q$ հավասարություններից արտաքսելով x-ը, գտնել առնչություն p-ի և q-ի միջև:

56. Հավասարություններից արտաքսել x–ը և y–ը (գտնել առնչություն a, b, c–ի միջև).

$$a = x + y, \quad b^3 = x^3 + y^3, \quad c^5 = x^5 + y^5 :$$

57. Ամբողջ x, y, z թվերն այնպիսին են, որ $xy + yz + zx = 1$: Ապացուցել, որ $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ թիվն ամբողջ թվի քառակուսի է:

58*. Հայտնի է, որ $x + y + z + t = 0$, ընդ որում՝ x, y, z, t թվերն ամբողջ են: Ապացուցել, որ

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}{2} + 2xyzt$$

թիվն ամբողջ թվի քառակուսի է:

59. Ստորև բերված չորս հավասարություններից միայն մեկն է, որը նույնություն է: Ո՞րն է այդ հավասարությունը.

1) $x^3 + 3xy + y^3 - 1 = (x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y - 1)$,

2) $(x + y + z)^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3) - 6xyz = 3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)$,

3) $\dfrac{(x-y)^7 - x^7 + y^7}{(x-y)^5 - x^5 + y^5} = \dfrac{7}{5}(x^2 + xy + y^2)$,

4) $\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = (a+b+c)x^2$: