ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ
ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐ
ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 6. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆ: ԵՆԹԱԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆ: ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

3. Գործողություններ բազմությունների հետ

Հաճախ հարկ է լինում դիտարկելու երեք և ավելի բազմությունների միավորումը և հատումը: Օրինակ, եթե $A=[1;7]$, $B=[2;8]$ և $C=[-1;4]$, ապա $(A\cup B)\cup C=[1;8)\cup[-1;4]=[-1;8)$, $(A\cap C)\cup B=[-1;4]\cup[2;8)=[1;8)$:

Բազմության տրոհումը զույգ առ զույգ չհատվող ենթաբազմությունների, անվանում են տվյալ բազմության ***դասակարգում***, իսկ ստացված ենթաբազմությունները՝ այդ դասակարգմանը համապատասխանող ***դասեր***:

Օրինակ 1: Բոլոր մարդկանց բազմությունը կարելի է տրոհել երկու խմբի՝ 1) մինչև 160 սմ հասակ ունեցողներ, 2) 160 սմ-ից բարձր հասակ ունեցողներ:

Օրինակ 2: Բնական թվերի բազմությունը կարելի է տրոհել երեք դասի՝

$$\{3k \mid k\in N\},\quad \{3k-1 \mid k\in N\},\quad \{3k-2 \mid k\in N\}:$$

Օրինակ 3: Բոլոր եռանկյունների բազմությունը կարելի է տրոհել երկու դասի՝

1) ուղղանկյուն եռանկյուններ, 2) ոչ ուղղանկյուն եռանկյուններ:

Օրինակ 4: Հարթության մեջ գտնվող բոլոր բազմանկյունների բազմությունը կարելի է տրոհել անվերջ թվով դասերի, նրանց դասակարգելով ըստ կողմերի թվի՝ եռանկյուններ, քառանկյուններ, հնգանկյուններ և այլն:

A, B և C բազմությունների ***միավորումը*** մի բազմություն է, որի յուրաքանչյուր տարր պատկանում է A, B կամ C բազմություններից գոնե մեկին (նկ. 1):

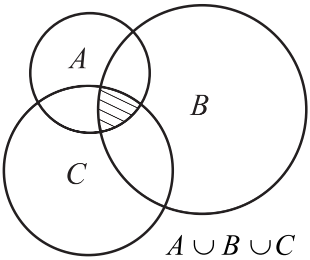
A, B և C բազմությունների ***հատումը*** բոլոր այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A, B և C բազմություններից յուրաքանչյուրին (նկ. 2):

Օրինակ, հավասարակողմ եռանկյունների, հավասարասրուն եռանկյունների և անհավասարակողմ եռանկյունների բազմությունների միավորումը բոլոր եռանկյունների բազմությունն է:

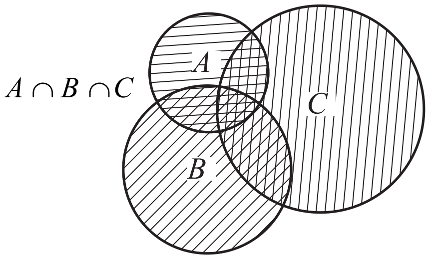
Եթե A–ն $6n+1,\ n\in N$ տեսքի պարզ թվերի բազմությունն է, B–ն $4n+3,\ n\in Z$ տեսքի թվերի բազմությունն է, իսկ C–ն 100–ը չգերազանցող դրական թվերի բազմությունն է, ապա A, B և C բազմությունների հատումը

$$\{7; 19; 31; 43; 55; 67; 79; 91\}$$

բազմությունն է (համոզվեք դրանում):



Նկ. 1



Նկ. 2

Բազմությունների միավորումը և հատումը օժտված են թվերի գումարման և բազմապատկման հատկություններին համանման որոշ հատկություններով. օրինակ, ***տեղափոխական, զուգորդական*** և ***բաշխական*** հատկություններով:

Ստորև ներկայացված են այդ հատկություններն արտահայտող հավասարություններ. ձախ կողմում՝ բազմությունների, իսկ աջ կողմում՝ թվերի համար:

1. $A\bigcup B=B\bigcup A$, $\qquad a+b=b+a$:
2. $A\bigcap B=B\bigcap A$, $\qquad ab=ba$:
3. $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$, $\qquad (a+b)+c=a+(b+c)$:
4. $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$, $\qquad (ab)\cdot c=a\cdot (bc)$:

5. $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$, $(a+b)\cdot\ c=ac+bc$:

Սակայն միշտ չէ, որ կա այդպիսի նմանություն: Օրինակ, բազմությունների համար, ակնհայտորեն, ճիշտ են

$$A\bigcup A=A,\ \ A\bigcap A=A,\ \ (A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup C$$

հավասարությունները, բայց

$$a+a=a,\ \ a\cdot\ a=a \text{ և } (a+c)(b+c)=ab+c$$

թվային հավասարությունները նույնություններ չեն:

Վերջավոր A բազմության համար $m(A)$–ով նշանակենք նրա տարրերի քանակը: Դատարկ բազմության տարրերի քանակը, ակնհայտորեն, հավասար է զրոյի:

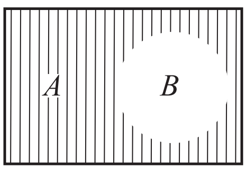
Ցանկացած վերջավոր A և B բազմությունների համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)-m(A\bigcap B): \qquad (1)$$

Այս թեորեմի ապացուցումը դժվարություն չի ներկայացնում (ապացուցեք ինքնուրույն):

3⁰. Բազմությունների տարբերություն: Ենթաբազմության լրացում: Բազմությունը, որը կազմված է A բազմության բոլոր այն տարրերից (և միայն դրանցից), որոնք չեն պատկանում B բազմությանը, կոչվում է A և B բազմությունների տարբերություն և նշանակվում է՝ $A\setminus B$:

3–րդ նկարում ուրվագծորեն պատկերված են այնպիսի A և B բազմություններ, որտեղ B–ն A–ի ենթաբազմություն է: Գծապատված պատկերը B բազմության լրացումն է մինչև A բազմությունը:



Նկ. 3

Օրինակ 4. Եթե $A=\{1;3;5;7\}$, $B=\{5;7;8;9;10\}$, ապա

$$A\setminus B=\{1;3\},\qquad B\setminus A=\{8;9;10\}:$$

Օրինակ 5. եթե A բազմությունը 2-ից մեծ բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, իսկ B-ն 5-ից փոքր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, այսինքն՝

$$A=\{x\in R\,|\,x>2\},\quad B=\{x\in R\,|\,x<5\},$$

ապա A և B բազմությունների տարբերությունը 5-ից ոչ փոքր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, իսկ B և A բազմությունների տարբերությունը 2-ից ոչ մեծ բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, այսինքն՝

$$A\setminus B=\{x\in R\,|\,x\geq 5\},\quad B\setminus A=\{x\in R\,|\,x\leq 2\}:$$

Եթե $A\subset B$, ապա $B\setminus A$ տարբերությունն անվանում են A բազմության ***լրացում*** մինչև B բազմությունը և նշանակում են A'_B:

Օրինակ, եթե $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$, ապա $A'_B=\{d,e\}$: Եթե I-ն իռացիոնալ թվերի բազմությունն է, ապա $Q'_R=I$ (Q-ն և R-ը, համապատասխանաբար, ռացիոնալ և իրական թվերի բազմություններն են):

Բազմության լրացման սահմանումից անմիջականորեն հետևում են հետևյալ հավասարությունները՝

$$A\bigcup A'_B=B,\quad A\bigcap A'_B=\varnothing,\quad (A'_B)'_B=A:$$

4^0. Դեկարտյան արտադրյալ: Եթե $a\in A$ և $b\in B$, ապա $(a;b)$ տեսքով գրված a և b տարրերի զույգն անվանում են ***կարգավորված զույգ***, ընդ որում համարում են, որ $(a_1;b_1)$ և $(a_2;b_2)$ զույգերը ***հավասար են*** միայն այն դեպքում, երբ $a_1=a_2$ և $b_1=b_2$:

Բոլոր $(a;b)$ կարգավորված զույգերից բաղկացած բազմությունը, որտեղ $a\in A$ և $b\in B$, կոչվում է A և B բազմությունների ***դեկարտյան արտադրյալ*** և նշանակվում է $A\cdot B$:

Օրինակ, եթե $A=\{a;b\}$ և $B=\{b;c\}$, ապա

$$A\cdot B=\{(a;b),\ (a;c),\ (b;b),\ (b;c)\},$$

$$B\cdot A=\{(b;a),\ (b;b),\ (c;a),\ (c;b)\}:$$

Դեկարտյան արտադրյալը չի ենթարկվում տեղափոխական օրենքին: $A\cdot B=B\cdot A$ հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $A=B$:

$A\cdot A$ արտադրյալն անվանում են ***դեկարտյան քառակուսի*** և նշանակում են A^2:

Օրինակ, R^2 դեկարտյան քառակուսին կոորդինատային հարթության բոլոր $(x;y)$ կետերի բազմությունն է: