

## ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ ԿՈՌՐԴԻՆԱՏՆԵՐ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

### § 5. ԹՎԱՅԻՆ ՈՒՂԻՂ ԵՎ ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

#### 4. Կորրդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության և հատվածը տրված հարաբերությամբ բաժանող կետի կորրդինատների բանաձևերը

Հարթության վրա կորրդինատների ներմուծումը հնարավորություն է տալիս երկրաչափական շատ խնդիրներ լուծել հանրահաշվորեն: Նման խնդիրներ լուծելիս հաճախ հարկ կլինի օգտվել կորրդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության՝ ստորև ձևակերպված բանաձևից:

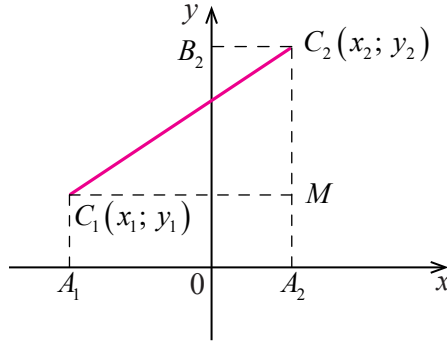
Թեորեմ: *Կորրդինատային հարթության ցանկացած  $C_1(x_1; y_1)$  և  $C_2(x_2; y_2)$  կետերի հեռավորությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$|C_1C_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} : ^1$$

Ապացուցում: Եթե  $x_1 = x_2$ , ապա ակնհայտ է, որ  $C_1C_2 = |y_2 - y_1|$ , իսկ եթե  $y_1 = y_2$ , ապա՝  $C_1C_2 = |x_2 - x_1|$ : Դիտարկենք ընդհանուր դեպք՝  $x_1 \neq x_2$  և  $y_1 \neq y_2$ : Պյութագորասի թեորեմի համաձայն ունենք՝

$$C_1C_2^2 = C_1M^2 + MC_2^2 \text{ (նկ. 1):}$$

<sup>1)</sup> Այդ բանաձևը հայտնի է միջին դարերի երկրաչափության դասընթացից:



Նկ. 1

Քանի որ  $C_1M = A_1A_2$ ,  $MC_2 = B_1B_2$ , ուստի  $C_1C_2^2 = A_1A_2^2 + B_1B_2^2$  :  
Մյուս կողմից ունենք՝

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|, \quad B_1B_2 = |y_2 - y_1|,$$

հետևաբար՝  $C_1C_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ , որտեղից հետևում է, որ

$$C_1C_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} :$$

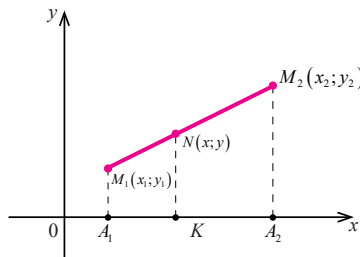
Թեորեմն սպացուցված է:

Օրինակ 1: Գտնենք  $C_1(-1; 4)$  և  $C_2(7; -2)$  կետերի հեռավորությունը:  
Լուծում: (1) բանաձևի շնորհիվ կարող ենք գրել՝

$$C_1C_2 = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10:$$

Օրինակ 2: Հարթության վրա տրված են  $M_1(x_1; y_1)$  և  $M_2(x_2; y_2)$  կետերը: ( $x_1 \neq x_2$ ,  $y_1 \neq y_2$ ):  $M_1M_2$  հատվածի վրա գտնել այնպիսի  $N$  կետ, որ  $M_1N : NM_2 = 2 : 3$ :

Լուծում: Դիցուք՝ որոնելի  $M$  կետի կոորդինատներն են  $x$  և  $y$ :



Նկ. 2

Նկ. 2-ից պարզ երևում է, որ  $A_1K : KA_2 = M_1N : NM_2$ , այսինքն՝  $A_1K : KA_2 = 2 : 3$ : Մյուս կողմից՝

$$A_1K = |x - x_1|, \quad KA_2 = |x_2 - x|:$$

Գժվար չէ համոզվել, որ  $M_1$  և  $M_2$  կետերի ցանկացած դիրքի դեպքում  $x - x_1$  և  $x_2 - x$  թվերն ունեն նույն նշանը, դրա համար էլ  $(x - x_1) : (x_2 - x)$  հարաբերությունը դրական է: Նշանակում է՝

$$|x - x_1| : |x_2 - x| = 2 : 3 \Leftrightarrow (x - x_1) : (x_2 - x) = 2 : 3:$$

Վերջին հավասարությունից կստանանք՝  $x = \frac{3x_1 + 2x_2}{5}$ :

Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ  $y = \frac{3y_1 + 2y_2}{5}$ :

Ընդհանուր դեպքում՝ եթե պահանջվում է գտնել  $M_1M_2$  հատվածի այնպիսի  $N(x; y)$  կետ, որ  $M_1N : NM_2 = \lambda (\lambda > 0)$ , խնդրի լուծումը տարվում է համանման դատողություններով: Ինքնուրույն ապացուցեք, որ այդ դեպքում  $N$  կետի կոորդինատները կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևերով՝

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}:$$

Նշենք, որ  $M_1M_2$  հատվածի միջնակետի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ պարզ բանաձևերով.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}:$$

## Հարցեր

1. Ինչ բանաձևով են գտնում կոորդինատային հարթության վրա տրված երկու կետերի հեռավորությունը:
2. Ինչ բանաձևերով են գտնում կոորդինատային հարթության վրա տրված հատվածի այն կետի կոորդինատները, որն այդ հատվածը բաժանում է տրված հարաբերությամբ:
3. Ինչի են հավասար կոորդինատային հարթության վրա  $AB$  հատվածի  $M$  միջակետի կոորդինատները, երբ հայտնի են  $A$  և  $B$  կետերի կոորդինատները:



## Առաջադրանքներ

1. Օրդիհնատների առանցքի վրա գտնել այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ լինի  $C(4; -2)$  և  $D(8;1)$  կետերից:
2. Հարթության վրա տրված են  $A(x_1; y_1)$  և  $B(x_2; y_2)$  կետերը: Գտնել  $AB$  հատվածի այն  $M$  կետը, որն այդ հատվածը բաժանում է  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) հարաբերությամբ ( $AM : MB = \lambda$ ):
3. Տրված են եռանկյան գագաթները՝  $A(-6; -12)$ ,  $B(9; 3)$ ,  $C(15; -9)$ : Գտնել  $ABC$  եռանկյան միջնագծերի հատման կետը:
4. Թվային առանցքի վրա կառուցել (նշել) հետևյալ թվերը պատկերող կետերը.

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{13}, \sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{3}:$$

5. Թվային առանցքի վրա նշված է  $\alpha \neq 0$  թիվը պատկերող կետը: Գտնել  $\frac{1}{\alpha}$  թիվը պատկերող կետը:
6. Հավասարման կամ անհավասարման տեսքով գրել պայման, որին բավարարում են կոորդինատային հարթության բոլոր այն  $M(x; y)$  կետերի կոորդինատները, որոնց համար.
  - ա)  $MA = 3$ , որտեղ  $A(0; 0)$ , բ)  $MA \leq 1$ , որտեղ  $A(0; 0)$ ,
  - գ)  $MA = 4$ , որտեղ  $A(2; 5)$ , դ)  $MA > 3$ , որտեղ  $A(0; 2)$ :
7. Կոորդինատային հարթության վրա պատկերել բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են տրված պայմանին.

$$\text{ա) } (x+2)(y-1)=0; \quad \text{բ) } (x-2)(x+y)=0:$$

$$\text{գ) } x < 4 \text{ և } y > -1; \quad \text{դ) } (x+2)y < 0:$$

$$\text{ե) } (x^2 - 4)(y^2 + 4) \geq 0; \quad \text{զ) } \frac{y-2x}{x^2 + y^2} \geq 0:$$

$$\text{է) } |x+y| = x+y; \quad \text{ը) } y+x^2 \leq 0:$$