ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 2. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐ

Հետևանքներ աքսիոմներից

Աքսիոմների միջոցով արտածվում (ապացուցվում) են հետագա պնդումները (թեորեմները): Օրինակ, $0\cdot r=0$ հավասարությունն ընդգրկված չէ դաշտի աքսիոմների խմբում, այն կարող է ապացուցվել աքսիոմների միջոցով, այսինքն՝ իրենից ներկայացնում է ոչ բարդ թեորեմ:

Կարելի է ապացուցել նաև մի շարք թեորեմներ: Օրինակ, 1-ին և 2-րդ աքսիոմներից բխում է, որ ***մի քանի թվերի գումարը գտնելիս կարելի է կամայական ձևով ընտրել գումարելիների կարգը և փակագծերի դասավորությունը.***

$$a+(b+c)=b+(c+a),\quad (a+b)+(c+d)=a+(b+(c+d))$$

և այլն: Այդ առումով էլ մի քանի գումարելիների գումարը կարելի է գրել առանց փակագծերի:

Դաշտի աքսիոմներից բխում են առաջին աստիճանի հավասարումների (և հավասարումների համակարգերի) լուծման կանոնը, ինչպես նաև կրճատ բազմապատկման բանաձևերը՝

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

և մյուսները:

Նշենք մեկ թեորեմ ևս, ***ըստ որի հավասարության մի մասից գումարելին կարելի է տեղափոխել մյուս մասը՝ այդ գումարելիի առջև դրված նշանը փոխելով հակադիրի:*** Այլ կերպ ասած, եթե

$$a+b=c, \tag{1}$$

ապա ճիշտ է նաև

$$a = c - b \tag{2}$$

հավասարությունը (և՝ հակառակը):

Որպես օրինակ ցույց տանք, թե դաշտի աքսիոմների միջոցով ինչպես կարելի է ապացուցել վերջին պնդումը: Դիցուք՝ ճիշտ է (1) հավասարությունը. նրա երկու մասերին ավելացնելով $-b$ թիվը՝ կստանանք.

$$(a+b)+(-b) = c+(-b):$$

Կիրառելով 2-րդ աքսիոմը՝ ստացված հավասարությունն արտագրենք

$$a+\left(b+(-b)\right) = c+(-b)$$

տեսքով, որն էլ, ըստ 4-րդ աքսիոմի, բերվում է

$$a+0 = c+(-b)$$

տեսքի: Այնուհետև, 3-րդ աքսիոմի համաձայն կունենանք՝

$$a = c+(-b):$$

Մնում է հիշել, որ $c+(-b)$ գումարը, ըստ պայմանավորվածության, գրառվում է $c-b$ տեսքով: Դրանով էլ ավարտվում է (2) հավասարության ապացուցումը:

Քանի որ այս կետում թվարկված պնդումները դաշտի աքսիոմներից արտածվող թեորեմներ են, ուստի այդ բոլոր պնդումները ճշմարիտ են ցանկացած դաշտում: Հետևաբար, եթե մեզ հանդիպի ուրիշ դաշտ, մենք իրավասու կլինենք նրանում ևս կիրառելու այդ պնդումները:

Առաջադրանքներ

1. Ինչպե՞ս է ապացուցվում $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ հավասարությունը: Համոզվեք, որ այդ ապացուցման ընթացքում, դաշտի աքսիոմներից բացի, ուրիշ ոչինչ չի կիրառվում:

2. Դաշտի աքսիոմների միջոցով ապացուցել հետևյալ հավասարությունները.

ա) $a(b+c+d) = ab+ac+ad$; բ) $a+a+a = 3a$:

3. ա) Նշել դաշտի այն աքսիոմները, որոնց միջոցով ստացվում են հետևյալ առնչությունները՝

$$a = 1\cdot a = (1+0)a = 1\cdot a + 0\cdot a = a + 0\cdot a:$$

բ) Օգտվելով ստացված $a = a + 0 \cdot a$ հավասարությունից՝ ապացուցել, որ $0 \cdot a = 0$:

4. ա) Ապացուցել, որ եթե $ab = 0$, ապա a, b թվերից գոնե մեկը հավասար է զրոյի:

բ) Ապացուցել, որ եթե $a \neq 0$ և $b \neq 0$, ապա $ab \neq 0$:

5. Ապացուցել, որ $a \neq 0$ դեպքում $ax + b = c$ հավասարումն ունի միակ արմատ՝

$$x = \frac{c-b}{a}:$$

6. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $(-a)b = -ab$; բ) $(-a)(-b) = ab$;

գ) $a(b-c) = ab - ac$; դ) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

ե) $(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$:

7. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\frac{c}{b} \cdot b = c \quad (b \neq 0)$, բ) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} \quad (ab \neq 0)$:

8. Ելնելով դաշտի աքսիոմներից, ապացուցել, որ ցանկացած a, b, c, d ռացիոնալ թվերի համար, որտեղ $b \neq 0, d \neq 0$, ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

ա) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ (կոտորակների գումարման կանոնը),

բ) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (կոտորակների բազմապատկման կանոնը):