ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ
ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐ
ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ: ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ

Տարաբնույթ խնդիրներ

Առաջադրանքներ

1*. Ո՞ր բնական n–երի դեպքում $4n^2+9n+1$ արտահայտության արժեքը կլինի բնական թվի քառակուսի:

2*. Ո՞ր բնական n–երի դեպքում $n^3+5n^2+11n+10$ արտահայտության արժեքը կլինի բնական թվի խորանարդ:

3*. Ապացուցել, որ $2^{32}+1$ թիվը բաժանվում է 641–ի:

4*. Ապացուցել, որ գոյություն չունի այնպիսի ամբողջ k թիվ, որ k^2+3k+5 թիվը բաժանվի 121–ի:

Գտնել բոլոր n բնական թվերը, որոնց դեպքում ճիշտ է հավասարությունը (5–7).

5. $n^2+n=90$:

6. $n^3+2n^2+5n=200$:

7. $2^n+n^2+n=1134$:

Գտնել բոլոր այն բնական $(x;y)$ թվազույգերը, որոնք բավարարում են տրված հավասարությանը (հավասարումը լուծել բնական թվերով) (8–11).

8. $x^2-y^2=7$:

9. $xy+4x-7y=33$:

10. $x^2+3xy+2x-3y=26$:

11. $x^2-6xy+13y^2=100$:

Գտնել ամբողջ x և y թվերի բոլոր $(x; y)$ զույգերը, որոնք բավարարում են տրված հավասարությանը (հավասարումը լուծել ամբողջ թվերով). (13–16).

12. $x+y=xy$:

13. $xy^2+x-3y^2=20$:

14*. $x^2-x+1=2^y$:

15*. $x!+12=y^2$:

Ապացուցել, որ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի (17–20).

16. $3x-12y=23$:

17. $x^2+x=3^y$:

18*. $x!+13=y^2$:

19*. $x^3+5x=7^y+3$:

20. Պարզ թվերն ունեն ճիշտ երկու բաժանարար՝ 1-ը և տվյալ թիվը: Իսկ ո՞ր բնական թվերն ունեն ճիշտ երեք բաժանարար: Նկարագրել այդպիսի բոլոր թվերը:

21*. 10101...0101 տեսքի թվերից որո՞նք են պարզ: Պատասխանը հիմնավորել:

22. Յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել 2-ի՝ տարբեր ցուցիչներով աստիճանների գումարի տեսքով:

Օրինակ՝ $187=2^7+2^5+2^4+2^3+2+1$: Ո՞ր եռանիշ թվերի համար այդպիսի ներկայացումը կպարունակի ամենաշատ քանակով գումարելիներ:

23. 1-ից մինչև 1000 բոլոր բնական թվերը հերթականությամբ գրելով կողք կողքի ստացանք բազմանիշ թիվ: Այդ թվի գրառման մեջ 1000-րդ տեղում ո՞ր թվանշանն է:

24. Գտնել այն ամենափոքր բնական թիվը, որի թվանշանների գումարը 63 է և բաժանվում է 63-ի:

25. Միայն 1 թվանշանով կազմված 11...11 թիվը քանի՞ թվանշան է պարունակում, եթե հայտնի է, որ այն բաժանվում է 41-ի:

26. Ապացուցել, որ եթե որոշ x և y բնական թվերի դեպքում $5x+2y$ թիվը 17-ի բազմապատիկ է, ապա նույն x և y թվերի համար $9x+7y$ թիվը նույնպես 17-ի բազմապատիկ է:

27. Դիցուք՝ $a=5x+4y$, $b=3x+7y$, որտեղ x և y թվերը բնական են: Ապացուցել, որ a թիվը բաժանվում է 23-ի միայն այն դեպքում, երբ b-ն բաժանվում է 23-ի:

28. $n+2$ նիշ ունեցող 100...001 թիվը պարունակում է n հատ 0: Ինչպիսի՞ n-երի դեպքում այդ թիվը կլինի 101-ի բազմապատիկ:

29*. Գտնել m թիվը 7-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը, որտեղ

$$m=10^{10}+10^{10^2}+10^{10^3}+\ldots+10^{10^9}+10^{10^{10}}:$$

30. Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{2}\left(12345678910111213^2+1\right)$$

թիվը կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով: Ընդհանրացնել խնդիրը:

31. Գտնել բոլոր $n>1$ բնական թվերը, որոնց համար ճիշտ է հետևյալ պնդումը. «Եթե բնական թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է n-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է n-ի»:

32*. Հնարավո՞ր է ընտրել այնպիսի n և k բնական թվեր, որ 5^n+1 թիվը լինի 5^k-1 թվի բազմապատիկ:

33*. Հնարավո՞ր է ընտրել այնպիսի բնական n թիվ, որ 5^n-1 թիվը լինի 4^k-1 թվի բազմապատիկ:

34*. Գոյություն ունի՞ այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում 3^n+1 թիվը բաժանվի 10^{100}-ի:

35*. Քանի՞ 1 թվանշան պետք է պարունակի

$$10101010...10101$$

թիվը, որպեսզի այն բաժանվի 9999-ի:

36. $111...11222...22$ $2n$-անիշ թիվը կազմված է n հատ 1 և n հատ 2 թվանշաններից: Ցանկացած n-ի դեպքում այդ թիվը ներկայացնել իրար հաջորդող երկու ամբողջ թվերի արտադրյալի տեսքով:

37. Հնարավո՞ր է ընտրել այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում $n^2+3n+59$ և n^2+n+57 թվերը միաժամանակ բաժանվեն 49-ի:

38. Գտնել բոլոր այն բնական n թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում 10^n+1 արտահայտությունը 1001-ի բազմապատիկ է:

39. Ապացուցել, որ $31^{41}+41^{51}+51^{61}$ թիվը բաղադրյալ է:

40*. Ապացուցել, որ 1-ից մինչև n բնական թվերի գումարը կարելի է ներկայացնել իրար հաջորդող երկու բնական թվերի արտադրյալի տեսքով միայն այն դեպքում, երբ $n^2+(n+1)^2$ արտահայտությունը լրիվ քառակուսի է:

41*. Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ բնական թվեր, որոնք նախ՝ լրիվ քառակուսիներ են և նորից մնում են լրիվ քառակուսիներ, եթե նրանց աջից կցագրվում է 1 թվանշանը:

42*. Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ բնական n թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում $2^n + n^2$ արտահայտությունը 100–ի բազմապատիկ է:

43. Ո՞ր բնական թվերը կարելի է ներկայացնել փոխադարձաբար պարզ և 1–ից մեծ երկու բնական թվերի գումարի տեսքով:

44*. Ինչպիսի՞ k բնական թվերի դեպքում 1–ից մինչև k բնական թվերի բազմությունը կարելի է տրոհել երկու խմբի այնպես, որ նրանցում ընդգրկված թվերի գումարները լինեն միմյանց հավասար:

45*. Տրված են $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ..., 197^2, 198^2, 199^2, 200^2$ թվերը: Ապացուցել, որ այդ 200 թվերը կարելի է տրոհել 100–ական թիվ պարունակող երկու խմբերի այնպես, որ նրանցում եղած թվերի գումարներն իրար հավասար լինեն:

46. Հավասարումը լուծել ամբողջ թվերով.

$$3\left(x^2 + xy + y^2\right) = x + 8y:$$

47*. Հավասարումը լուծել բնական x և y թվերով.

$$x^3 - x^2 - xy = y^3 + y^2 + 100:$$

Օգտվելով Ֆերմայի փոքր թեորեմից, լուծել ստորև բերված խնդիր–ները (48–54).

48. Ապացուցել, որ $\left(15^{41} - 15\right) \vdots 41$:

49. Ապացուցել, որ $\left(7^{101} - 7\right) \vdots 101$:

50. Ապացուցել, որ $\left(11^{256} - 1\right) \vdots 257$:

51. Բաժանվու՞մ է արդյոք $17^{100} + 201$ թիվը 101–ի:

52*. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում

$$4^n + 3^{6n+2} - 2^{8n} + 5$$

արտահայտությունը 7–ի բազմապատիկ է:

53*. Հայտնի է, որ $x + y + z = 150$ $\left(x,\ y,\ z \in N\right)$: Ի՞նչ մնացորդ կարող է ստացվել՝ $x^{13} + y^{13} + z^{13}$ արտահայտությունը 13–ի բաժանելիս:

54*. Ապացուցել, որ ցանկացած P պարզ թվի համար գոյություն ունեն անվերջ շատ բնական n թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում $2^n - n$ թիվը բաժանվում է P–ի:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ, ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ, ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

1*. Նկատենք, որ ցանկացած բնական n–ի դեպքում՝

$$4n^2+4n+1<4n^2+9n+1<4n^2+12n+9,$$

այսինքն՝

$$(2n+1)^2<4n^2+9n+1<(2n+3)^2:$$

Այդ նշանակում է, որ տրված արտահայտությունը գտնվում է $2n+1$ և $2n+3$ բնական թվերի քառակուսիների միջև: Հետևաբար, բնական թվի քառակուսի լինելու համար այն կարող է հավասարվել $2n+1$ և $2n+3$ բնական թվերի միջև եղած միակ՝ $2n+2$ բնական թվի քառակուսուն:

$$4n^2+9n+1+(2n+2)^2$$

հավասարումից կստանանք՝ $n=3$:

Պատասխան՝ $n=3$:

2*. ***Ցուցում:*** Նկատել, որ ցանկացած բնական n–ի դեպքում

$$(n+1)^3<n^3+5n^2+11n+10<(n+3)^3:$$

Այնուհետև, տե՛ս նախորդ խնդրի լուծումը:

Պատասխան՝ $n=1$:

3*. Ունենք՝

$$2^{32}+1=16\cdot 2^{28}+1=(641-625)\cdot 2^{28}+1=641\cdot 2^{28}-(625\cdot 2^{28}-1)=$$

$$=641\cdot 2^{28}-\left((5\cdot 2^7)^4-1\right):$$

Քանի որ բնական n–ի դեպքում $(n^4-1)\vdots(n+1)$, ուստի $(5\cdot 2^7)^4-1$–ը բաժանվում է $5\cdot 2^7-1$–ի, այսինքն՝ 641–ի: Հետևաբար՝ $(2^{32}+1)\vdots 641$:

4*. Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի այնպիսի ամբողջ k թիվ, որ $k^2+3k+5=121m$, որտեղ $m\in Z$: Այս հավասարությունը ներկայացնենք այսպես՝

$$(2k+3)^2=11(44m-1):$$

Ստացված հավասարության ձախ մասն իրենից ներկայացնում է ամբողջ թվի քառակուսի: Հետևաբար, աջ մասը ևս պետք է ներկայանա որպես ամբողջ թվի քառակուսի: Քանի որ այնտեղ գտնվող արտադրյալի մի արտադրիչը 11 պարզ թիվն է, ուստի անհրաժեշտ է, որ երկրորդ արտադրիչը բաժանվի 11–ի: Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ $44m$–ը բաժանվում է 11–ի, իսկ 1–ը՝ ոչ: Ստացված հակասությունը ապացուցում է խնդրի պնդումը:

5. Տրված հավասարությունն արտագրենք այսպես՝

$$n(n+1)=90:$$

Ստացվում է, որ երկու հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը հավասար է $9\cdot 10$–ի, նշանակում է՝ n–ի միակ արժեքը 9–ն է (հիմնավորե՛ք):

Պատասխան՝ $n=9$:

6. Նկատենք, որ $n=5$–ը բավարարում է: Դժվար չէ հասկանալ, որ եթե $n>5$, ապա $n^3+2n^2+5n>200$, իսկ եթե $n<5$, ապա $n^3+2n^2+5n<200$: Հետևաբար, տրված հավասարությանը բավարարող միակ թիվը 5–ն է:

Դիտողություն: Այդ հավասարումը կարելի է լուծել նաև արտադրիչ–ների վերլուծման եղանակով: Այն համարժեք է

$$n(n^2+2n+5)=200$$

հավասարմանը: Քանի որ n–ը ձախ մասի փոքր արտադրիչն է և $200 \vdots n$, ուստի փորձարկման ենթակա կլինեն $n=1$, $n=2$, $n=4$, $n=5$, $n=8$, $n=10$ արժեքները: Ստուգումով պարզվում է, որ միայն $n=5$ արժեքն է բավարարում այդ հավասարությանը:

Պատասխան՝ $n=5$:

7. Նկատենք, որ $n=10$ թիվը բավարարում է: Ապացուցենք, որ այդ հավասարությանը բավարարող ուրիշ բնական թիվ չկա:

Իրոք, եթե $n>10$, ապա $2^n>2^{10}$, $n^2>100$, հետևաբար՝

$$2^n+n^2+n>1024+100+10=1134:$$

Եթե $1\le n<10$, ապա $2^n+n^2+n<1024+100+10=1134$:

Հետևաբար, $n=10$–ը տրված հավասարությանը բավարարող միակ բնական թիվն է (ավելին՝ միակ դրական թիվն է):

Պատասխան՝ $n=10$:

8. Հավասարությունն արտագրենք այսպես՝

$$(x-y)(x+y)=7:$$

Ակնհայտ է, որ $x>y$ և $x-y<x+y$: Երկու բնական թվերի արտա–դրյալը հավասար է 7–ի միայն այն դեպքում, երբ նրանցից փոքրը հա–վասար է 1–ի, իսկ մեծը՝ 7–ի: Նշանակում է՝

$$x-y=1 \text{ և } x+y=7:$$

Այս հավասարություններից անմիջապես գտնում ենք՝ $x=4$, $y=3$:

Պատասխան՝ (4; 3):

9. Կատարենք այսպիսի ձևափոխություններ.

$$(xy+4x)-(7y+28)=5,$$
$$x(y+4)-7(y+4)=5,$$
$$(x-7)(y+4)=5:$$

Ստացված հավասարության ձախ մասում ունեցանք երկու ամբողջ թվերի արտադրյալ, ընդ որում՝ նրանցից մեկը բնական է: Հետևաբար, այդ հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ.

$$\begin{cases} x-7=1, \\ y+4=5 \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} x-7=5, \\ y+4=1: \end{cases}$$

Առաջին համակարգից գտնում ենք՝ $x=8$, $y=1$, իսկ երկրորդ համակարգը բնական թվերով լուծում չունի:

Պատասխան՝ (8; 1):

10. Ունենք՝

$$x^2+3xy+2x-3y=26,$$
$$(x^2+3xy+3x)-(x+3y)=26,$$
$$x(x+3y+3)-(x+3y+3)=23,$$
$$(x+3y+3)(x-1)=23:$$

Ակնհայտ է, որ $x\neq 1$: Հետևաբար, ձախ մասը երկու բնական թվերի արտադրյալ է: Քանի որ $(x-1)$-ը փոքր արտադրիչն է և 23-ը պարզ թիվ է, ուստի այդ հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն

$$x-1=1 \text{ և } x+3y+3=23$$

պայմաններով: Այստեղից էլ անմիջապես ստանում ենք պատասխանը՝

$$x=2, \quad y=6:$$

11. Հավասարությունն արտագրենք հետևյալ տեսքով՝

$$(x-3y)^2=100-4y^2: \qquad (1)$$

Որպեսզի այս հավասարությունը տեղի ունենա, անհրաժեշտ է, որ $100-4y^2$ արտահայտությունը լինի ոչբացասական:

$100-4y^2\geq 0$ պայմանից կստանանք՝ $y^2\leq 25$:

Այս անհավասարությանը բավարարող բնական y-ների բազմությունն է՝

$$\{1; 2; 3; 4; 5\}:$$

Մնում է այս արժեքները հերթականությամբ տեղադրել (1) հավասարության մեջ և գտնել համապատասխան x-ի բնական արժեքները:

Պատասխան՝ (1; 3); (17; 3):

12. Կատարենք այսպիսի ձևափոխություններ.

$x = xy - y, \qquad x = y(x-1), \qquad (x-1)+1 = y(x-1), \qquad (x-1)(y-1) = 1:$

Այս հավասարությունն ամբողջ՝ $x-1$ և $y-1$ թվերի դեպքում տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ.

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1 \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1: \end{cases}$$

Այստեղից էլ անմիջապես ստանում ենք պատասխանը՝ $(2;\, 2); (0;\, 0):$

13. Հավասարումը ձևափոխենք այսպես՝

$$(xy^2 - 3y^2) + (x-3) = 17,$$

$$y^2(x-3) + (x-3) = 17,$$

$$(x-3)(y^2+1) = 17:$$

Քանի որ ամբողջ y-ի դեպքում y^2+1-ը բնական է, ուստի վերջին հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ.

$$\begin{cases} x-3=1, \\ y^2+1=17 \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} x-3=17, \\ y^2+1=1: \end{cases}$$

Պատասխան՝ $(4;\, 4); (4;\, -4); (20;\, 0):$

14*. Ունենք՝

$$x(x-1)+1 = 2^y:$$

Նկատենք, որ ցանկացած ամբողջ x-ի դեպքում $x(x-1)$-ը զույգ թիվ է, հետևաբար՝ $x(x-1)+1$-ը կենտ թիվ է: y-ի բնական արժեքների դեպքում 2^y-ը զույգ թիվ է: Բացասական ամբողջ y-ների դեպքում 2^y-ը կոտորակային թիվ է: Հետևաբար, զրոյից տարբեր ոչ մի ամբողջ y չի կարող բավարարել տրված հավասարությանը: Մնում է ստուգել $y=0$ արժեքը: Այդ դեպքում կունենանք՝ $x^2 - x + 1 = 1$, որտեղից՝ $x=0$ կամ $x=1$:

Պատասխան՝ $(0;\, 0); (1;\, 0):$

15*. Ակնհայտ է, որ եթե $x \geq 5$, ապա $x!$ թիվը կվերջանա 0 թվանշանով ($5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$, $n! = 5!\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot n$, երբ $n \geq 6$): Հետևաբար, այդպիսի x-երի դեպքում $x!+12$-ը վերջանում է 2 թվանշանով, որը չի կարող լինել որևէ ամբողջ թվի քառակուսի: Նշանակում է՝ x-ի համար «թեկնածու» արժեքներ կարող են լինել միայն 1, 2, 3, 4 թվերը: Հերթականությամբ տեղադրելով տրված հավասարության մեջ՝ համոզվում ենք, որ y-ի ամբողջ արժեք կստացվի միայն $x=4$ դեպքում:

Պատասխան՝ $(4;\, 6); (4;\, -6):$

16. ***Ցուցում:*** Ցանկացած x և y ամբողջ թվերի դեպքում $3x-12y$ արտահայտության մոդուլը բաժանվում է 3–ի, մինչդեռ 23–ը չի բաժանվում 3–ի:
17. Ունենք՝

$$x(x+1)=3^y:$$

Ցանկացած ամբողջ x–ի դեպքում $x(x+1)$–ը զույգ թիվ է: y–ի բնական արժեքների դեպքում 3^y–ը կենտ թիվ է, իսկ բացասական ամբողջ y–ների դեպքում 3^y–ը կոտորակային թիվ է: Մնում է փորձել $y=0$ արժեքը: Այդ դեպքում կստանանք՝ $x^2+x=1$, որն էլ ամբողջ թվերով լուծում չունի:
18. ***Ցուցում:*** $x\geq 5$ դեպքում հավասարման ձախ մասը վերջանում է 3 թվանշանով (տե՛ս N 15* խնդրի լուծման ընթացքը):
19. y–ի բացասական ամբողջ արժեքների դեպքում հավասարման աջ մասը կոտորակային թիվ է, մինչդեռ ցանկացած ամբողջ x–ի դեպքում ձախ մասն ամբողջ է:

$y=0$ դեպքում կունենանք՝ $x^3+5x=4$: Ակնհայտ է, որ $x\leq 0$ դեպքում այս հավասարումն արմատ չունի:

x–ի բնական արժեքների դեպքում x^3+5x արտահայտությունը չի կարող ընդունել 6–ից փոքր արժեք (երբ $x=1$, ապա $x^3+5x=6$):

Այժմ դիտարկենք y–ի բնական արժեքները: Այդպիսի y–ների համար հավասարման աջ մասը 7–ի բաժանելիս տալիս է 3 մնացորդ: Այդ նկատառումով էլ եզրակացնում ենք, որ բավական է x ամբողջ թիվը ներկայացնել $7k,\ 7k+1,\ 7k+2,\ 7k+3,\ 7k+4,\ 7k+5,\ 7k+6$ տեսքերից մեկով, որտեղ k–ն ամբողջ թիվ է: Առանց դժվարության կարելի է համոզվել, որ բոլոր դեպքերում էլ ձախ մասի մոդուլը 7–ի բաժանելիս չի կարող ստացվել 3 մնացորդ:

Այդպիսով ապացուցվեց, որ տրված հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի:
20. p^2, որտեղ p–ն ցանկացած պարզ թիվ է: Ցուցում: Որոնելի թվերը չեն կարող ունենալ մեկից ավելի պարզ բաժանարար, քանի որ այդպիսի թվերն ունեն առնվազն չորս բաժանարար (միայն p և q պարզ թվերի pq արտադրյալն ունի ճիշտ չորս բաժանարար): Նշանակում է՝ որոնելի թվերը պետք է փնտրել p^k տեսքի թվերի մեջ, որտեղ p–ն պարզ թիվ է, իսկ k–ն՝ բնական: Յուրաքանչյուր k–ի դեպքում այն ունի $k+1$ բաժանարար $(1, p, p^2, ..., p^k)$:

Հետևաբար, խնդրի պայմաններին կբավարարեն միայն p^2 տեսքի թվերը:
21*. Լուծում: Եթե այդ տեսքի թվերից որևէ մեկը՝ n–ը, ունի k հատ 1–եր $(k\geq 3)$, ապա $11\cdot n$ թիվը կազմված կլինի $2k$ հատ 1–երից և կբաժանվի k հատ 1–երով կազմված q թվի վրա: Եթե k–ն կենտ է, ապա q–ն չի

բաժանվի 11-ի, ուստի n-ը կբաժանվի q-ի: Եթե k-ն զույգ է, ապա q-ն բաժանվում է 11-ի, իսկ n-ը բաժանվում է $\frac{q}{11}$ քանորդի վրա: Այսպիսով, $k \geq 3$ դեպքում n թիվը բաղադրյալ է: Մնում է ստուգել 101 թիվը, որն էլ, ակնհայտորեն, պարզ թիվ է:

22. 511; 767; 895; 959; 991: ***Ցուցում:*** Քանի որ

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 1023,$$

ապա եռանիշ թվերի համար այդպիսի ներկայացումը չի կարող պարունակել 9-ից ավելի գումարելի: Բավական է փնտրել բոլոր այն եռանիշ թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը կպարունակի ճիշտ 9 գումարելի: Այդպիսի բոլոր եռանիշ թվերը կստանանք, եթե վերոնշյալ հավասարության ձախ մասի՝ 23-ից մեծ գումարելիներից յուրաքանչյուրը հերթով հեռացնենք (դրանք են՝ 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9 գումարելիները):

23. 3: Լուծում: Միանիշ թվերը զբաղեցնում են 9 տեղ, երկնիշ թվերը՝ $2 \cdot 90 = 180$ տեղ, ուստի միասին՝ 189 տեղ: Մնացած՝ $1000 - 189 = 811$ տեղերը զբաղեցնում են եռանիշ թվերը: Քանի որ $811 = 270 \cdot 3 + 1$, ապա այդ 811 տեղերը զբաղեցնում են առաջին 270 եռանիշ թվերը և 271-րդ եռանիշ թվի առաջին թվանշանը: Բայց 271-րդ եռանիշ թիվը 370-ն է: Հետևաբար, որոնելի թվանշանը 3-ն է:

24. 19 899 999: ***Ցուցում:*** Միակ յոթանիշ թիվը, որի թվանշանների գումարը 63 է, 9 999 999 թիվն է, որը չի բաժանվում 7-ի: Ակնհայտ է, որ 1-ով սկսվող ութանիշ թվերի մնացած յոթ թվանշաններից վեցը պետք է լինեն 9-եր, իսկ մեկը՝ 8, որ նրա թվանշանների գումարը դառնա 63: Այդպիսի թվերից 7-ի բազմապատիկ ամենափոքր թիվը 19 899 999-ն է: Քանի որ այդ թիվը բաժանվում է նաև 9-ի, ուստի բաժանվում է $7 \cdot 9 = 63$-ի:

25. $5k$ $(k \in N)$ քանակով 1-եր: ***Ցուցում:*** 1; 11; 111; 1111; ... թվերը հերթականությամբ «անկյունաձև» բաժանելով 41-ի, կարելի է նկատել, որ առաջինը 11111 թիվն է 41-ի բազմապատիկ: Այնուհետև մնացորդները կարող են կրկնվել: Հետևաբար, 41-ի կբաժանվեն միայն 5-ի բազմապատիկ քանակով 1-երի դեպքում:

26. ***Ցուցում:*** Կարելի է օգտվել, օրինակ, այսպիսի նույնությունից՝

$$2(9x + 7y) = 7(5x + 2y) - 17x:$$

27. ***Ցուցում:*** Նկատել, որ $5b = 3a + 23y$:

28. $n = 4k + 1$, որտեղ $k = 0; 1; 2; 3; \ldots$: ***Ցուցում:*** Տրված թիվը ներկայացնել $10^{n+1} + 1$ տեսքով և n-ի համար դիտարկել չորս հնարավոր դեպքեր.

$n = 4k$; $n = 4k + 1$; $n = 4k + 2$; $n = 4k + 3$, որտեղ $k = 0; 1; 2; 3; \ldots$:

29*. 5: ***Ցուցում:*** Համոզվել, որ 10^6-ը 7-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ և 10^{6k+r}–ը, որտեղ $k \in N$, իսկ $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, 7–ի բաժանելիս տալիս է նույն մնացորդը, ինչ 10^r–ը: Մյուս կողմից, նկատել, որ 10^n $(n \in N)$ թիվը 6–ի բաժանելիս տալիս է 4 մնացորդ: Այդ փաստի շնորհիվ տրված գումարը 7–ի բաժանելիս տալիս է նույն մնացորդը, ինչ

$$10^4 + 10^4 + \ldots + 10^4 + 10^4 = 10 \cdot 10^4 = 10^5$$

թիվը:

30. ***Ցուցում:*** Ապացուցեք, որ ցանկացած կենտ n բնական թվի դեպքում $\frac{1}{2}(n^2+1)$–ը կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով:

31. 3 և 9: ***Ցուցում:*** Ակնհայտ է, որ 3 և 9 թվերի համար բերված պնդումը ճիշտ է: Ցույց տանք, որ ուրիշ թիվ չկա: Եթե տվյալ պնդումը ճիշտ լինի մի որոշ n–ի դեպքում, նշանակում է՝ մասնավորաբար այն ճիշտ պետք է լինի 111...112 և 111...121 $n-1$ նիշ ունեցող թվերի համար, որոնցում 1 թվանշանը մասնակցում է $n-2$ անգամ (քանի որ դրանցից յուրաքանչյուրի թվանշանների գումարը n է): Եթե այդ թվերը բաժանվեն n–ի, ապա դրանց տարբերությունը կբաժանվի n–ի, այսինքն՝ 9–ը պետք է բաժանվի n–ի: Նշանակում է, իրոք, $n = 3$ կամ 9:

32*. Ո՛չ: ***Ցուցում:*** $n > 1$ և $k > 1$ դեպքում $5^n + 1$ թիվը վերջանում է 26–ով, ուստի չի բաժանվում 4–ի, մինչդեռ $5^k - 1$ թիվը ցանկացած բնական k–ի դեպքում բաժանվում է 4–ի: Եթե $n = 1$ և $k = 1$, կունենանք 6 և 4 թվերը, իսկ 6–ը չի բաժանվում 4–ի:

33*. Ո՛չ: ***Ցուցում:*** Եթե n–ը զույգ է, ապա 4^n թիվը վերջանում է 6 թվանշանով, ուստի $4^n - 1$ թիվը բաժանվում է 5–ի, իսկ $5^n - 1$ թիվը, ակնհայտորեն, չի բաժանվում 5–ի: Եթե n–ը կենտ է, ապա $4^k - 1$ թիվը բաժանվում է 3–ի, իսկ $5^n - 1$ թիվը չի բաժանվում 3–ի:

34*. Ո՛չ: ***Ցուցում:*** 3 թվի կենտ ցուցիչով աստիճանները վերջանում են 3 կամ 7 թվանշանով, ուստի և այդ դեպքում չեն բաժանվում 5–ի, առավել ևս՝ 10^{100}–ի: Եթե n–ը զույգ թիվ է՝ $n = 2k$, ապա $3^n + 1 = 9^k + 1$, որը 4–ի բաժանելիս տալիս է 2 մնացորդ, այսինքն՝ չի բաժանվում 4–ի, առավել ևս՝ 10^{100}–ի:

35. $198k$, որտեղ $k \in N$: ***Ցուցում:*** Նկատել, որ $9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$: Այնուհետև օգտվել 9–ի և 11–ի բաժանելիության հայտանիշներից: Դժվար չէ հասկանալ, որ տվյալ տեսքի թվերը կբաժանվեն 101–ի միայն այն դեպքում, երբ 1–երի քանակը զույգ է:

36. ***Ցուցում:*** Նշանակելով տրված թիվը a–ով, իսկ $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ թիվը՝ b–ով, կարող ենք գրել՝

$$a=\underbrace{111...11}_{n}\underbrace{22...22}_{n}=b\cdot 10^n+2b=b\left(10^n+2\right)=b(9b+3)=3b(3b+1):$$

37. Ո՛չ: Լուծում: Ենթադրենք, թե գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում տրված երկու արտահայտությունները բաժանվում են 49–ի: Այդ դեպքում 49–ի կբաժանվի նաև դրանց տարբերությունը, այսինքն՝ $2n+2$–ը, որն էլ տեղի կունենա, երբ $n=49k-1 \quad (k\in N)$: Սակայն այդպիսի n–երի դեպքում երկրորդ արտահայտությունը՝ $n^2+n+57=n\cdot 49k+57$, չի բաժանվում 49–ի: Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ այդպիսի n գոյություն չունի:

38. $n=6m+3$, որտեղ $m=0;1;2;3;...$: ***Ցուցում:*** n բնական թվերի համար դիտարկել դեպքեր.

$$n=6m,\ n=6m+1,\ n=6m+2,\ n=6m+3,\ n=6m+4,\ n=6m+5,$$

որտեղ $m=0;1;2;3;...$:

39. ***Ցուցում:*** Կարելի է ապացուցել, որ տրված թիվը 3–ի բազմապատիկ է: Դրանում կարելի է համոզվել հետևյալ նկատառումներով.

$$31^{41}=(30+1)^{41}=30q+1\,(q\in N),$$

$$41^{51}=(42-1)^{51}=30m-1\,(m\in N),$$

իսկ $51^{61}=3^{61}\cdot 17^{61}$:

40*. Լուծում: Ունենք՝ $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$: Ընդունենք, թե այն ներկայացվում է իրար հաջորդող՝ k և $k+1$ թվերի արտադրյալի տեսքով, այսինքն՝ $n(n+1)=2k(k+1)$: Այդ պայմանով կարող ենք գրել՝

$$n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1=2n(n+1)+1=4k(k+1)+1=(2k+1)^2,$$

որն էլ ամբողջ թվի քառակուսի է:

Ապացուցենք հակադարձ պնդումը: Դիցուք՝ գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում տրված արտահայտությունը լրիվ քառակուսի է.

$$n^2+(n+1)^2=m^2:$$

Ակնհայտ է, որ m–ը կենտ թիվ է, նշանակում է՝ գոյություն ունի այնպիսի բնական k թիվ, որ $n^2+(n+1)^2=(2k+1)^2$: Բայց այդ դեպքում.

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+(n+1)^2-1}{4}=\frac{(2k+1)^2-1}{4}=k(k+1):$$

41*. ***Ցուցում:*** Անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ $(m;\ k)$ բնական թվազույգեր, որոնք բավարարում են

$$10m^2+1=k^2 \tag{1}$$

հավասարությանը: Նախ՝ ընտրենք այդպիսի որևէ թվազույգ: Դժվար չէ գուշակել, որ $m=6,\quad k=19$ թվազույգն այդպիսին է:

(1) հավասարությունից հետևում է, որ $(k^2-10m^2)^2=1$, որը հարմար է ներկայացնել այսպես՝

$(k^2+10m^2)^2-10(2mk)^2=1$, այլ կերպ՝ $10\left(2mk\right)^2+1=\left(k^2+10m^2\right)^2$:

Վերջին հավասարությունը ցույց է տալիս, որ եթե որևէ $(m;\ k)$ թվազույգ բավարարում է (1) հավասարությանը, ուստի դրան կբավարարի նաև $(2mk;\ k^2+10m^2)$ թվազույգը: Հենց այս պնդման շնորհիվ էլ սկզբնական՝ $m=6,\quad k=19$ թվազույգի միջոցով կստանանք անվերջ թվով $(m;\ k)$ թվազույգեր: Դրանով էլ հիմնավորվում է խնդրի պնդման ճշմարիտ լինելը:

42*. ***Ցուցում:*** Ցույց տալ, որ $n=100k+6\quad(k=0,1,2,...)$ տեսքի ցանկացած թվի համար խնդրի պնդումը ճիշտ է:

43. Ցանկացած բնական թիվ, բացի 1, 2, 3, 4, 6 թվերից:

Լուծում: Սկզբնական ստուգումով պարզում ենք, որ 1-ից մինչև 6 բնական թվերից միայն 5-ն է բավարարում խնդրի պայմանին $(5=2+3)$:

Ապացուցենք, որ ցանկացած $n>6$ բնական թիվ կարելի է ներկայացնել փոխադարձաբար պարզ երկու գումարելիների գումարի տեսքով:

Եթե n-ը կենտ թիվ է, ապա $n=2+(n-2)$ ներկայացումը, ակնհայտորեն, բավարարում է խնդրի պայմանին:

Եթե n-ը զույգ թիվ է, ապա այն կամ $4k$, կամ $4k+2$ տեսքի է $(k\in N)$: Առաջին դեպքում՝

$$4k=(2k-1)+(2k+1)$$

տեսքը բավարարում է խնդրի պայմանին, քանի որ $2k-1$ և $2k+1$ թվերը փոխադարձաբար պարզ են (ինչո՞ւ):

Երկրորդ դեպքում n-ը կներկայացնենք այսպես՝

$$n=4k+2=(2k-1)+(2k+3):$$

Այն փաստի հիմնավորումը, ըստ որի՝ ցանկացած k բնական թվի դեպքում $2k-1$ և $2k+3$ թվերը փոխադարձաբար պարզ են, առանձնակի դժվարություն չի ներկայացնում (թողնվում է ընթերցողին):

44*. $k=4m$ կամ $k=4m-1$, որտեղ $m\in N$: Լուծում: 1-ից մինչև k բնական թվերի գումարը հավասար է $\dfrac{k(k+1)}{2}$: Նշանակենք այն q-ով: Եթե $k=4m+1$ կամ $k=4m+2\quad(m=0;1;2;...)$, ապա համապատասխանաբար կունենանք՝ $q=(4m+1)(2m+1)$ կամ $q=(4m+3)(2m+1)$:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած m-ի դեպքում ստացված թվերից յուրաքանչյուրը կենտ թիվ է, հետևաբար չի կարող դառնալ երկու հավասար թվերի գումար (որը զույգ թիվ է):

$n = 4m$ դեպքում տրոհումը կարելի է իրագործել հետևյալ կերպ.

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; ...; 4m-3; 4m-2; 4m-1; 4m:$$

Թվերը դիտարկենք ըստ քառյակների (դրանք m հատ են) և նկատենք, որ յուրաքանչյուր քառյակում առաջին և չորրորդ թվերի գումարը հավասար է երկրորդ և երրորդ թվերի գումարին (դա հետևում է $(4p-3)+4p=(4p-2)+(4p-1)$ հավասարությունից): Հետևաբար, մի խմբում կվերցնենք

$$1; 4; 5; 8; 9; 12; ...; 4m-3; 4m$$

թվերը, իսկ երկրորդ խմբում՝

$$2; 3; 6; 7; 10; 11; ...; 4m-2; 4m-1$$

թվերը:

$n = 4m+3$ դեպքում առանձնացնելով 1, 2 և 3 թվերը, մնացած $4m$ հատ թվերի համար բաշխումը կարվի այնպես, ինչպես նախորդ դեպքում: Այնուհետև խմբերից մեկում կընդգրկենք 1 և 2 թվերը, իսկ մյուսում՝ 3 թիվը:

45*. ***Ցուցում:*** Մի խմբում կարելի է ընդգրկել

$$8k+1, \quad 8k+4, \quad 8k+6, \quad 8k+7$$

տեսքի թվերի քառակուսիները, իսկ մյուսում՝ մնացած՝

$$8k+2, \quad 8k+3, \quad 8k+5, \quad 8k+8$$

տեսքի թվերի քառակուսիները, որտեղ $k = 0,1,2,3,...,23,24$: Այդ մտահղացումը բխում է հետևյալ նույնությունից՝

$$(8k+1)^2+(8k+4)^2+(8k+6)^2+(8k+7)^2=$$
$$=(8k+2)^2+(8k+3)^2+(8k+5)^2+(8k+8)^2:$$

46. $x=0, \quad y=0$ կամ $x=1, \quad y=1$: Ցուցում: Հավասարումն արտագրել այսպես՝

$$3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0$$

և այն դիտարկել իբրև քառակուսային հավասարում փոփոխականի նկատմամբ:

47*. $x=8; \quad y=6$: ***Ցուցում***: Տրված հավասարումը ձևափոխել այսպես.

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x+y)^2+100,$$

այնուհետև կատարել փոփոխականների փոխարինում՝ $x-y=a$, $xy=b$:

Դրանից հետո էլ հավասարումը ներկայացնել այսպես՝

$$b(3a-4)=100+a^2+a^3:$$

$a=1$ դեպքում այդ հավասարման ձախ և աջ մասերն ունեն տարբեր նշաններ, իսկ $a>1$ դեպքում $b(3a-4)>0$: Հետևաբար, անհրաժեշտ է, որ աջ մասն էլ լինի դրական, այսինքն՝ $100+a^2-a^3>0$, որտեղից՝ $a^3<a^2+100$: Դժվար չէ համոզվել, որ վերջին հավասարությունը ճիշտ է միայն $a=2$, $a=3$, $a=4$ բնական թվերի դեպքում ($a\geq 5$ դեպքում $100+a^2-a^3\leq 0$): Մնացածը պարզ է:

48. ***Ցուցում:*** Քանի որ 41-ը պարզ թիվ է, ապա ըստ Ֆերմայի փոքր թեորեմի՝

$$(15^{41}-15)\vdots 41:$$

49. ***Ցուցում:*** Քանի որ 101-ը պարզ թիվ է, ապա ըստ Ֆերմայի փոքր թեորեմի՝

$$(17^{101}-7)\vdots 101:$$

50. ***Ցուցում:*** Քանի որ 257-ը պարզ թիվ է, ապա Ֆերմայի փոքր թեորեմի հետևանքի համաձայն՝

$$(11^{257-1}-1)\vdots 257:$$

Հիշենք: Ցանկացած a բնական թվի և ցանկացած p պարզ թվի համար՝ $(a^{p-1}-1)\vdots p$:

51. Այո: ***Ցուցում:*** Տրված արտահայտությունը ներկայացնենք այսպես՝

$$17^{100}+201=(17^{101-1}-1)+202,$$

որն էլ բաժանվում է 101-ի, քանի որ, ըստ Ֆերմայի փոքր թեորեմի

$$(17^{101-1}-1)\vdots 101 \text{ և } 202\vdots 101:$$

52*. ***Ցուցում:*** Տրված արտահայտությունը ձևափոխենք այսպես.

$$4^n+3^{6n+2}-2^{8n}+5=(2^{2n}-2^{8n})+9\cdot(3^n)^6+5=-2^{2n}(2^{6n}-1)+2((3^n)^6-1)+7=$$
$$=2((3^n)^6-1)-4^n\cdot((2^n)^6-1)+7:$$

Ֆերմայի փոքր թեորեմի շնորհիվ՝

$$(3^n)^6-1 \text{ և } (2^n)^6-1:$$

արտահայտություններից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 7-ի: Հետևաբար, տրված արտահայտությունը, ցանկացած բնական n-ի դեպքում, բաժանվում է 7-ի:

53*. 7: ***Ցուցում:*** Դիտարկենք

$$(x^{13}+y^{13}+z^{13})-(x+y+z) \qquad (1)$$

տարբերությունը, որը հարմար է ներկայացնել այսպես՝

$$(x^{13}-x)+(y^{13}-y)+(z^{13}-z):$$

Ըստ Ֆերմայի փոքր թեորեմի ստացված երեք գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 13-ի, հետևաբար (1) տարբերությունը նույնպես բաժանվում է 13-ի.

$$(x^{13}+y^{13}+z^{13})-(x+y+z)=13q \quad (q\in N):$$

Մյուս կողմից՝

$$x+y+z=150=11\cdot 13+7:$$

Հետևաբար՝

$$x^{13}+y^{13}+z^{13}=13q+11\cdot 13+7=13(q+11)+7:$$

54*. ***Ցուցում:*** Վերցնենք՝ $n=(pk-1)(p-1)$, որտեղ k-ն ցանկացած բնական թիվ է: Այդ դեպքում.

$$2^n-n=2^{(pk-1)(p-1)}-(pk-1)(p-1)=\left((2^{pk-1})^{p-1}-1\right)-p(k^2-k-1):$$

Ըստ Ֆերմայի փոքր թեորեմի՝

$$\left((2^{pk-1})^{p-1}-1\right)\vdots\, p:$$