ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՑՈՒՄ

Դուք արդեն ծանոթ եք անհավասարությունների հիմնական հատկություններին (տե՛ս, գլ. I, §2, կ. 2)։ Հետագայում հաճախ հարկ կլինի առնչվել նաև ստորև բերված հատկություններին, որոնք ապացուցվում են հիմնական հատկությունների միջոցով.

1) ***Եթե*** $a > b \geq 0$, ***ապա ցանկացած*** $n \in N$ ***դեպքում*** $a^n > b^n$,

2) ***Եթե*** $a > b$, ***ապա ցանկացած*** $n \in N$ ***դեպքում*** $a^{2n+1} > b^{2n+1}$,

3) ***Եթե*** $a > b \geq 0$, ***ապա ցանկացած*** $n \geq 2$, $n \in N$ ***դեպքում*** $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$,

4) ***Եթե*** $a > b$, ***ապա ցանկացած*** $n \in N$ ***դեպքում*** $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$ ։

Օգտակար է հիշել մի քանի կարևոր (առավել գործածական) անհավասարություններ.

1. Ցանկացած a ***և*** b ***թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝***

$$a^2 + b^2 \geq 2ab : \qquad (1)$$

2. Ցանկացած դրական a ***թվի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝***

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 : \qquad (2)$$

3. Երկու ոչբացասական թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից՝

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} : \qquad (3)$$

Ընդհանրապես, եթե $n \geq 2$, $n \in N$, ***ցանկացած ոչբացասական*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից***, այսինքն՝

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \text{ :}^{1)} \qquad (4)$$

4. Ցանկացած $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար ճիշտ է

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n| \qquad (5)$$

անհավասարությունը:

Մասնավորաբար, $|a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|$:

5. Ցանկացած $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n$ թվերի համար տեղի ունի Բունյակովսկու անհավասարությունը.[2)]

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \text{ :} \qquad (6)$$

Այդ անհավասարությունը հակիրճ գրառում են այսպես՝

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \text{:}$$

* * *

Այս պարագրաֆում հիմնականում կդիտարկվեն այնպիսի անհավասարություններ, որոնց ճշմարիտ լինելը պահանջվում է ապացուցել փոփոխականների արժեքների տրված բազմության վրա: Եթե այդպիսի բազմություն չի նշված, ապա պետք է հասկանալ, որ այդ փոփոխականները կարող են ընդունել ցանկացած թույլատրելի արժեքներ:

Նշենք, որ անհավասարությունների ապացուցման ընդհանուր մեթոդ գոյություն չունի: Այստեղ, տիպական անհավասարությունների մի քանի օրինակների քննարկմամբ, կառանձնացնենք այնպիսի եղանակներ, որոնք առավել գործածական են անհավասարություններն ապացուցելիս:

1⁰. Անհավասարությունների ապացուցում սահմանման և նույնական ձևափոխությունների օգնությամբ: Սահմանման համաձայն ընդունվում է, որ $p > q$, եթե $p - q$ տարբերությունը դրական է: Դրա համար էլ $a, b, \ldots, h$ փոփոխականներով $f(a,b,\ldots,h) > g(a,b,\ldots,h)$ անհավասարությունն ապացուցելու համար անհրաժեշտ է կազմել $f(a,b,\ldots,h) - g(a,b,\ldots,h)$ տարբերությունը և նույնական որոշ ձևափոխությունների միջոցով համոզվել նրանում, որ այն դրական է փոփոխականների թույլատրելի բոլոր արժեքների կամ նախապես նշված բազմության տարրերի դեպքում (համանմանորեն, այդ եղանակը կի-

---

*[1)] Անհավասարությունն անվանում են **Կոշիի անհավասարություն**՝ ի պատիվ ֆրանսիացի հայտնի մաթեմատիկոս Օգյուստեն Կոշիի (XIX դ.):*

բառվում է նաև $f<g$, $f\ge g$, $f\le g$ տեսքի անհավասարություններն ապացուցելիս):

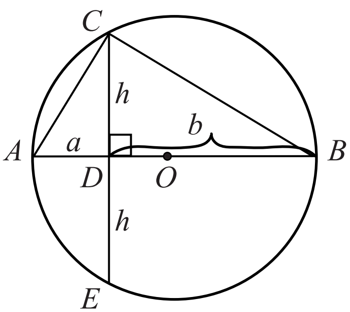
Ապացուցվելիք անհավասարության ձախ և աջ մասերի արտահայտությունների տարբերությունը նույնական ձևափոխությունների միջոցով կարելի է տանել տարբեր ուղղություններով, սակայն այստեղ կարևոր է կողմնորոշվել և ընտրել այն ուղին, որը կարող է լինել ավելի արդյունավետ:

Օրինակ 1: Ապացուցենք (3) անհավասարությունը:

Ապացուցում: Կազմենք $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ տարբերությունը և պարզենք նրա նշանը: Ունենք՝ $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած ոչբացասական a և b արժեքների դեպքում վերջին արտահայտությունը ոչբացասական է, հետևաբար, $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ տարբերությունն է ոչբացասական, իսկ դա նշանակում է, որ $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$:

Նշենք, որ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b$:



Նկ. 1

Դիտողություն: *Երկու թվերի միջին թվաբանական և միջին երկրաչափական անվանումները ծագել են այն փաստից, որ x թիվը թվաբանական պրոգրեսիա կազմող a, x, b երեք թվերից միջինն է $\left(x=\frac{a+b}{2}\right)$, իսկ y թիվը a, y, b դրական անդամներով երկրաչափական պրոգրեսիայի միջին անդամն է $\left(y=\sqrt{ab}\right)$: Ապացուցված անհավասարությունն ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն: Ինչպես հայտնի է՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյան $\left(\angle C=90°\right)$ մեջ ներքնաձիգին պարած CD բարձրությունը AD* և *DB հատվածների միջին երկրաչափականն է (նկ. 1): Նշանակելով՝ $AD=a$, $DB=b$, կունենանք՝ $CD=\sqrt{ab}$: Մյուս կողմից, CE–ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի լար է, ուստի $CE\le AB$: Քանի որ $CE=2\cdot CD$ և $AB=a+b$, հետևաբար $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$:*

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ եթե $ab>0$, ապա

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2:$$

Ապացուցում: Ունենք՝

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}:$$

Քանի որ $ab>0$, ուստի, ակնհայտ է, որ $\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$: Պարզ է, որ հավասարության նշան տեղի ունի միայն $a=b$ դեպքում: Այսպիսով, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2$ տարբերությունը ոչբացասական է, հետևաբար անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ եթե $a+b+c\geq 0$, ապա

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc:$$

Լուծում: Դիտարկենք $(a^3+b^3+c^3)-3abc$ տարբերությունը, որում a^3+b^3 գումարը լրացնենք մինչև գումարի խորանարդ: Կստանանք՝

$$(a^3+b^3+c^3)-3abc=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc=$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b+c)+c^3:$$

$(a+b)^3+c^3$ խորանարդների գումարը վերածելով բազմապատկիչների, կունենանք՝

$$((a+b)^3+c^3)-3ab(a+b+c)=((a+b)+c)((a+b)^2-$$
$$-(a+b)c+c^2)-3ab(a+b+c)=$$
$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2):$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $a+b+c\geq 0$, ուստի, ակնհայտորեն, ստացված արտահայտությունը ոչբացասական է: Այստեղից հետևում է տրված անհավասարության ճշմարիտ լինելը: Նկատենք, որ այդ անհավասարության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպ-քում, երբ

$$a+b+c=0 \text{ կամ } a=b=c(c\geq 0):$$

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ ցանկացած x և y թվերի համար

$$2x^2+3xy+2y^2-2x-3y+5>0:$$

Լուծում: Ապացուցվելիք անհավասարության ձախ մասի արտահայ-տությունը ձևափոխենք այսպես.

$$2x^2+3xy+2y^2-2x-3y+5=(x^2+2xy+y^2)+(x^2+xy+y^2-2x-3y+5)=$$

$$(x+y)^2+(x^2+(y-2)x+y^2-3y+5)=(x+y)^2+\left(x+\frac{y-2}{2}\right)^2-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2+y^2-3y+5=$$

$$=(x+y)^2+\left(x+\frac{y-2}{2}\right)^2+\frac{2y^2+(y-4)^2}{4}:$$

Ստացված արտահայտությունից պարզ երևում է, որ ցանկացած x և y թվերի դեպքում այն դրական է (ինչո՞ւ չի կարող հավասարվել զրոյի): Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 5: Ապացուցենք անհավասարությունը՝

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y:$$

Լուծում: Դիտարկենք $(x^2+y^2+1)-(xy+x+y)$ տարբերությունը և այն ձևափոխենք այսպես՝

$$\frac{1}{2}((x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1))=\frac{1}{2}((x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2):$$

Վերջին արտահայտությունը, ակնհայտորեն, ցանկացած x և y թվե-րի դեպքում ոչբացասական է: Դրանով էլ ապացուցվում է բերված ան-հավասարությունը: Նկատենք, որ այդ անհավասարության մեջ հավա-սարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=y=1$ (հիմնավորեք):

2^0. Անհավասարությունների ապացուցում՝ անհավասարությունների հատկությունների կիրառմամբ:

Օրինակ 6: Ապացուցենք, որ եթե $n\in N$, $n>1$, ապա

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1:$$

Լուծում: Ունենք՝

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\cdot 2}<\frac{1}{1\cdot 2};\quad \frac{1}{9}=\frac{1}{3\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 3};\ \ldots\ ;\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{(n-1)n}:$$

Գումարելով այդ n անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n-(n-1)}{(n-1)n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n}<1$$

Այսպիսով, ցանկացած $n\geq 2$ թվի դեպքում $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$:

Օրինակ 7: Ապացուցենք, որ ցանկացած $n>1$ բնական թվի դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}<2:$$

Լուծում: Ամենից առաջ նկատենք, որ անհավասարության ձախ մասը պարունակում է $2n$ գումարելի: Դժվար չէ նկատել, որ այդ գումարելիներից յուրաքանչյուրը փոքր է $\frac{1}{n}$–ից, այսինքն՝

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n+2}<\frac{1}{n},\ldots,\ \frac{1}{3n-1}<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{3n}<\frac{1}{n}:$$

Գումարելով այդ $2n$ անհավասարությունները, կունենանք.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}<2n\cdot\frac{1}{n}=2:$$

Ստացվեց այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Օրինակ 8: Ապացուցենք, որ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{99}{100}>\frac{1}{15}:$$

Լուծում: Ձախ մասի արտադրիչներն $\frac{n}{n+1}$ տեսքի են, որտեղ

$n=1, 2 \ldots ,99$: Այդպիսի յուրաքանչյուր կոտորակի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n} \text{ (համոզվեք ինքնուրույն):}$$

Այդ անհավասարության շնորհիվ կարող ենք գրել.

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6} > \frac{4}{5}, \ldots, \quad \frac{97}{98} > \frac{96}{97}, \quad \frac{99}{100} > \frac{98}{99}:$$

Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները, կունենանք.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100} > \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{96}{97} \cdot \frac{98}{99}:$$

Ապացուցվելիք անհավասարության ձախ մասը նշանակելով a–ով, վերջին անհավասարությունը կարող ենք ներկայացնել այսպես՝ $2a > \dfrac{1}{100a}$:

Երկու մասերը բազմապատկելով $\dfrac{a}{2}$–ով, կունենանք՝ $a^2 > \dfrac{1}{200}$:

Քանի որ $\dfrac{1}{200} > \dfrac{1}{225}$, ուստի առավել ևս՝ $a^2 > \dfrac{1}{225}$, որտեղից էլ կունենանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝ $a > \dfrac{1}{15}$:

3^0. **Անհավասարությունների ապացուցում հայտնի անհավասարությունների կիրառմամբ:** Այս մեթոդի էությունը հետևյալն է. որոշ ակնհայտ կամ հայտնի (ելակետային) անհավասարությունների կիրառմամբ մի շարք ձևափոխությունների միջոցով ստացվում է ապացուցվելիք անհավասարությունը: Իբրև ակնհայտ անհավասարություններ կարող են գործածվել, օրինակ, $A^2 \geq 0$, $A^2 + B^2 \geq 0$, $|A| \geq 0$ (A–ն և B–ն ցանկացած արտահայտություններ են), $\sqrt[2k]{A} \geq 0$ (A–ի ցանկացած ոչբացասական արժեքների և $k \in N$ համար) անհավասարությունները, իսկ որպես ելակետային՝ (1)–(6) անհավասարությունները:

Օրինակ 9: Ապացուցենք, որ եթե $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, ապա

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

(Կոշիի անհավասարությունը չորս թվերի համար):

Ապացուցում: Որպես ելակետային վերցնենք (3) անհավասարությունը: Կիրառելով այն $\dfrac{a+b}{2}$ և $\dfrac{c+d}{2}$ ոչբացասական թվերի համար, կունենանք՝

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}:$$

Քանի որ, իր հերթին, (3) անհավասարության շնորհիվ՝

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ և $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$, հետևաբար՝ $\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$:

Նշանակում է՝ $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}$:

Այսինքն՝ $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$:

Վերլուծելով ապացուցման ընթացքը, գալիս ենք այն եզրակացության, որ այդ անհավասարության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b, c=d$ և $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$, այսինքն՝ $a=b=c=d$:

Օրինակ 10: Ապացուցենք, որ $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$ $(n \in N)$:

Լուծում: Օգտվելով (3) անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n\cdot 1};\quad \frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1)\cdot 2};\quad \frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2)\cdot 3};\ldots;$$
$$\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2(n-1)};\quad \frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1\cdot n}:$$

Բազմապատկելով այդ n անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{(n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1)(1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n)} = \sqrt{n!n!} = \sqrt{(n!)^2} = n!:$$

Այսպիսով, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$, որն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Դժվար չէ համոզվել, որ ապացուցված անհավասարության մեջ հավասարության նշան կարող է տեղի ունենալ միայն $n=1$ դեպքում:

Օրինակ 11: Ապացուցենք Բունյակովսկու (6) անհավասարությունը:

Ապացուցում: Եթե $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, ապա (6)-ում տեղի ունի հավասարության դեպք: Դիցուք, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է. այդ դեպքում՝

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2>0:$$

Դիտարկենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\left(a_1x+b_1\right)^2+\left(a_2x+b_2\right)^2+\cdots+\left(a_nx+b_n\right)^2: \qquad (1)$$

Ակնհայտ է, որ փոփոխականների ցանկացած արժեքների դեպքում այդ արտահայտությունը ոչբացասական մեծություն է: Այն ներկայացնենք նույնաբար հավասար հետևյալ արտահայտության տեսքով.

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)x^2+2\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)x+\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right): \quad (2)$$

Վերջինս կարելի է դիտարկել որպես քառակուսային եռանդամ x փոփոխականի նկատմամբ: Քանի որ ցանկացած x–ի դեպքում այդ եռանդամը ոչբացասական է, ուստի նրա տարբերիչը ոչդրական է, այսինքն՝

$$D=\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2-\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\le 0,$$

որտեղից ստանում ենք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right):$$

Պարզենք, թե ինչ պայմանների դեպքում տեղի կունենա հավասարության նշան, այսինքն՝ $D=0$: Այդ դեպքում (2) քառակուսային եռանդամն ունի միակ՝ x_0 արմատ: Մյուս կողմից, (1) արտահայտությունը հավասար կլինի զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր գումարելիները հավասար են զրոյի.

$a_1x_0+b_1=a_2x_0+b_2=\ldots=a_nx_0+b_n=0,$ որտեղից՝

$b_1=-x_0a_1, \quad b_2=-x_0a_2,\ldots,b_n=-x_0a_n:$

Այդ նշանակում է, որ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ և $b_1,b_2,\cdots,b_n$ փոփոխականների արժեքները համեմատական են (համեմատականության $-x_0$ գործակցով): Մասնավորաբար, եթե $b_i\ne 0\,(i=1,2,\cdots,n)$, ապա $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$:

Հարցեր

1. Ո՞ր անհավասարություններն են համարվում ակնհայտ: Նշել այդպիսի մի քանի անհավասարություններ:
2. Ի՞նչ հայտնի (առավել գործածվող) անհավասարություններ կան:
3. Ձևակերպել Կոշիի անհավասարությունը:

Առաջադրանքներ

1. Ապացուցել 1–4–րդ հատկությունները:

Ապացուցել, որ (2–36).

2. $a^2+b^2 \geq 2|ab|$:

3. Եթե $a>0$, $b>0$, ապա $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$:

4. Եթե $a<0$, ապա $a+\frac{1}{a}\leq -2$:

5. $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq 2$:

6. $a^2+b^2\geq ab$:

7. Եթե $a+b\geq 0$, ապա $ab(a+b)\leq a^3+b^3$:

8. $a^4+b^4\geq a^3b+b^3a$:

9. Եթե $a+b\geq 0$, ապա $\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$:

10. $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$:

11. $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$:

12. $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$:

13. Եթե $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$, ապա $(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$:

14. Եթե $a>0,\ b>0,\ c>0$, և $a+b+c=1$, ապա $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$:

15. $|a+1|+|a-3|\geq 4$:

16. $|b+c-a|+|a+c-b|+|a+b-c|\geq|a+b+c|$:

17. $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$:

18. Եթե $a>0, b>0, c>0$, ապա $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$:

19. $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$:

20. $\frac{a+b+c+d}{4}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$:

21. Եթե $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$, ապա $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$:

22. Եթե $a>0,\ b>0,\ c>0$, ապա $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$:

23. Եթե $a>0, b>0, c>0$, ապա $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$:

24. Եթե $n\geq 2,\ n\in N$, ապա $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$:

25. Եթե $n\geq 2,\ n\in N$, ապա $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$:

26. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<1$:

27. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{3}{4}$:

28. $\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ \ldots\cdot\frac{9}{100}<\frac{1}{10}$:

Լրացուցիչ առաջադրանքներ[3)]

1. $a^2+2b^2+2ab+b+10>0$:

2. $a^8-a^5+a^2-a+1>0$:

3. Եթե $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$ և $a+b+c=1$, ապա $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$:

4. Եթե $a+b+c=0$, ապա $ab+bc+ca\leq 0$:

5. $|a-1|+|a-2|+|a-3|\geq 2$:

6. $|4a-3b|+|3a-4b|\geq|a+b|$:

7. Եթե $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$, ապա $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq 6abc$:

8. Եթե $a>0,\ b>0$, ապա $(a^2+a+1)(b^2+b+1)\geq 9ab$:

9. Դիցուք, a–ն և b–ն ցանկացած դրական թվեր են: Դիտարկենք այդ թվերի միջին հարմոնիկը (H_2), միջին երկրաչափականը (G_2), միջին թվաբանականը (A_2) և միջին քառակուսայինը (Q_2).

$$H_2=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}};\qquad G_2=\sqrt{ab};\qquad A_2=\frac{a+b}{2};\qquad Q_2=\sqrt{\frac{a^2+b_2}{2}}:$$

10. Եթե $a<b<c$, ապա $a^2b+b^2c+c^2a<a^2c+b^2a+c^2b$: Ապացուցել:

11. Ապացուցել, որ եթե $a_1,a_2,\ldots,a_n$ թվերից ամենափոքրը A-ն է, իսկ ամենամեծը՝ B-ն, ապա

$$A\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\le B:$$

12. Դիցուք, $a_1,a_2,\ldots,a_n$-ը ցանկացած թվեր են, $b_1,b_2,\ldots,b_n$-ը՝ դրական թվեր: Նշանակենք $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\ldots,\frac{a_n}{b_n}$ կոտորակներից ամենափոքրը m-ով, ամենամեծը՝ M-ով: Ապացուցել, որ

$$m\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\le M:$$

13. Դիցուք, $a_1, a_2,\ldots,a_n$-ը ցանկացած թվեր են, ընդ որում՝ $|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|$ թվերից ամենափոքրը A-ն է, ամենամեծը՝ B-ն: Ապացուցել, որ

$$A\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\le B:$$

14. Ապացուցել, որ ցանկացած իրական $a_1, a_2,\ldots,a_n$ թվերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\le n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2):$$

15. Ապացուցել, որ $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{k=1}^{n}b_k^2=1$ պայմանին բավարարող ցանկացած $a_1,a_2,\ldots,a_n$ և $b_1,b_2,\ldots,b_n$ թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\le 1:$$

16. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական $a_1,a_2,\ldots,a_n$ թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2:$$

17*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական $n\ge 2$ դեպքում

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{2}{3}:$$

18*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1:$$

19*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում ճիշտ է

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

անհավասարությունը:

20*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2:$$

21*. Ապացուցել, որ եթե $1\le a\le 2,\quad 1\le b\le 3,\quad 1\le c\le 4$, ապա

$$(a+b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\right)\le 36:$$

22*. Ապացուցել անհավասարությունը՝

$$\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}>\frac{3}{2},\ \text{որտեղ}\ a>0,\quad b>0,\quad c>0:$$

23*. Հայտնի, է որ $x+y+z=5$ և $xy+yz+zx=8$: Ապացուցել՝ $x, y, z\in\left[1;\frac{7}{3}\right]$:

24*. Ապացուցել, որ եթե $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ դրական թվերը բավարարում են $a_1+a_2+\cdots+a_? =1;\quad b_1+b_2+\cdots+b_n=1$ պայմաններին, ապա

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\ge 1:$$

25*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$n<\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\cdots+\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}\le n+1:$$

26*. Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>2000:$$

27*. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}{n}}:$$

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

2. Դիտարկենք դեպքեր:

ա) $a \le 0$: Այդ դեպքում $a^8 \ge 0$, $-a^5 \ge 0$, $a^2 \ge 0$, $-a \ge 0$: Հետևաբար, $a^8 + (-a^5) + a^2 + (-a) \ge 0$: Նշանակում է՝ $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 > 0$:

բ) $0 < a < 1$ դեպքում ունենք՝

$$a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^8 + (a^2 - a^5) + (1 - a) > 0,$$

քանի որ $a^2 - a^5 = a^2(1 - a^3) > 0$ և $1 - a > 0$:

գ) $a \ge 1$ դեպքում $a^8 \ge a^5$, $a^2 \ge a$, այսինքն $a^8 - a^5 \ge 0$ և $a^2 - a \ge 0$: Դրա համար էլ՝

$$a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 > 0:$$

Հետևաբար, տրված անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած a թվի դեպքում:

3. $a + b + c = 1$ պայմանից հետևում է, որ

$$1 - a = b + c,\ 1 - b = a + c,\ 1 - c = a + b,$$

որոնց շնորհիվ ապացուցվելիք անհավասարությունը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$(b + c)(c + a)(a + b) \ge 8abc:$$

Այնուհետև, տես նախորդ առաջադրանքի լուծումը:

7. Ունենք՝

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) = (a^2b + bc^2) + (b^2c + ca^2) + (c^2a + ab^2) \ge$$

$$\ge 2\sqrt{a^2b \cdot bc^2} + 2\sqrt{b^2c \cdot ca^2} + 2\sqrt{c^2a \cdot ab^2} = 2abc + 2bca + 2cab = 6abc:$$

(այստեղ մենք օգտվեցինք $p + q \ge 2\sqrt{pq}$ $(p \ge 0,\ \ q \ge 0)$ հայտնի անհավասարությունից): Հետևաբար,

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \ge 6abc:$$

Հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a = b = c$:

8. Անհավասարության երկու մասերը բաժանենք ab-ի վրա և ապացուցենք ստացված անհավասարությունը՝

$$\left(a + \frac{1}{a} + 1\right)\left(b + \frac{1}{b} + 1\right) \ge 9:$$

Օգտվելով $p + \dfrac{1}{p} \ge 2$ $(p > 0)$ հայտնի անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝ $a+\frac{1}{a}+1\geq 3$, $b+\frac{1}{b}+1\geq 3$: Բազմապատկելով դրական մասերով այդ նույնիմաստ անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\left(a+\frac{1}{a}+1\right)\left(b+\frac{1}{b}+1\right)\geq 9:$$

Ստացված անհավասարության երկու մասերը բազմապատկելով ab-ով, կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը: Նկատենք, որ հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=1$:

10. $a<b<c$ պայմանից հետևում է, որ

$$a-b<0, \qquad a-c<0, \qquad b-c<0,$$

հետևաբար, նաև՝

$$(a-b)(a-c)(b-c)<0:$$

Բացելով փակագծերը, կստանանք՝

$$a^2b-a^2c-abc+ac^2-ab^2+abc+cb^2-c^2b<0,$$

որտեղից էլ կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$a^2b+b^2c+ac^2<a^2c+b^2a+c^2b:$$

11. Պայմանի համաձայն ունենք՝

$$A\leq a_1\leq B, \quad A\leq a_2\leq B,\ldots, \quad A\leq a_n\leq B:$$

Անդամ առ անդամ գումարելով այս անհավասարությունները, կստանանք հետևյալ ճիշտ անհավասարությունը՝

$$nA\leq a_1+a_2+\ldots+a_n\leq nB:$$

Ստացված անհավասարությունների բոլոր մասերը բաժանելով -ի վրա, կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$A\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leq B:$$

13. Ըստ պայմանի՝

$$A\leq|a_1|\leq B, \quad A\leq|a_2|\leq B,\ldots, \quad A\leq|a_n|\leq B:$$

Քանի որ A-ն և B-ն $|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|$ ոչբացասական թվերից են, ուստի վերևում ունենք ոչ բացասական մասերով նույնիմաստ անհավասարություններ: Յուրաքանչյուր անհավասարությունը բարձրացնելով քառակուսի, ապա գումարելով ստացվող բոլոր անհավասարությունները, կունենանք ճիշտ անհավասարություն՝

$$nA^2 \le a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \le nB^2 :$$

Ստացվածի բոլոր մասերը բաժանելով n–ի վրա, ստանում ենք՝

$$A^2 \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \le B^2 :$$

Ի վերջո, բոլոր մասերից քառակուսի արմատ հանելով, կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$A \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \le B :$$

16. Առաջին եղանակ: Ունենք՝

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= n + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) :$$

Նշենք, որ ձախ մասի արտադրյալի փակագծերը բացելուց կստացվի $n \cdot n = n^2$ գումարելի, որոնցից n հատը 1–եր են: Մնացած գումարելիների ($\frac{a_k}{a_m}$ տեսքի թվերի, որտեղ $k, m \in \{1; 2; 3; \ldots; n\}, k \ne m$) քանակը կլինի $n^2 - n$: Հետևաբար, այդպիսի գումարելիների զույգերի (ինչպես վերևում խմբավորված են փակագծերով) քանակը կլինի $\frac{n^2 - n}{2}$: Քանի որ առանձնացված զույգերը փոխհակադարձ դրական թվեր են, ուստի մենք իրավասու կլինենք կիրառելու $p + \frac{1}{p} \ge 2 \quad (p > 0)$ հայտնի անհավասարությունը: Դրա շնորհիվ կունենանք՝

$$\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \ge 2 + 2 + \ldots + 2 = n(n-1) :$$

Հետևաբար,

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n + n(n-1) = n^2 :$$

Ստացվեց այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել: Ապացուցման ընթացքից պարզ երևում է, որ այստեղ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$:

Երկրորդ եղանակ: Կիրառենք Կոշիի անհավասարությունը՝ սկզբում $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի, այնուհետև՝ $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ թվերի համար.

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\,,\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \ge n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}}\,:$$

Բազմապատկելով ստացված դրական մասերով նույնիմաստ անհավասարությունները, կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2\,:$$

17. Ի տարբերություն նախորդ առաջադրանքում եղած անհավասարությանը, տրված անհավասարությունն ավելի խիստ է: Դրա համար անհրաժեշտ կլինի, այսպես ասած, ավելի «նուրբ» գնահատել ձախ մասի գումարելիները: Այդ նպատակով հարմար է կիրառել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-0,25} = \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{2k-1} - \frac{2}{2k+1}\,:$$

Այդ անհավասարության շնորհիվ կունենանք՝

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1} = \frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1} < \frac{2}{3}\,:$$

19. Հետևյալ $n+1$ թվերի՝ $1, 1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}$ համար կիրառելով թվաբանական և երկրաչափական միջինների հայտնի կապը (Կոշիի անհավասարությունը), կունենանք՝

$$\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} > \sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,,$$

այսինքն՝

$$\frac{1+(n+1)}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\,:$$

Ստացված անհավասարության երկու մասերը բարձրացնելով $(n+1)$ աստիճան, կունենանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,:$$

Նշենք, որ այստեղ, կիրառելով Կոշիի անհավասարությունը, բացառել ենք հավասարության նշանը, քանի որ $1 \ne 1+\frac{1}{n}$ (հիշենք, որ Կոշիի անհավասարության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր թվերը միմյանց հավասար են):

26. Բավականաչափ մեծ n-երի համար $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ գումարը գնահատենք այսպես.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\ldots+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)=$$
$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{k}=1+\frac{k}{2}\,:$$

Վերևում, գումարելիները խմբավորելիս, $k-1$-րդ փակագծում ներառված են $\frac{1}{2^{k-1}+1}$-ից մինչև $\frac{1}{2^k}$ թվերը, որոնց քանակը՝ $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$: Այնուհետև, յուրաքանչյուր փակագծի բոլոր գումարելիները փոխարինվել են նրանում եղած գումարելիներից ամենափոքրով՝ վերջին գումարելիով, որի շնորհիվ էլ գումարը փոքրացել է: Ինչպիսի p թիվ էլ լինի, միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի k թիվ, որ $1+\frac{k}{2}$-ը գերազանցի p-ն: Ակնհայտ է, որ $2p-2$-ից մեծ ցանկացած k բնական թիվ (օրինակ, $2p$) կբավարարի այդ պայմանին: Մեր օրինակում, որտեղ $p=2000$, բավական է ընտրել՝ $k=4000$: Համապատասխանաբար, $n=2^{4000}$-ի (և, իհարկե, 2^{4000}-ից մեծ ցանկացած n-ի) դեպքում

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}>2000\,:\,]$$

§ 2. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. Անհավասարման հասկացությունը: Անհավասարումների համարժեքությունը

Անհավասարումների հետ կապված հիմնական սահմանումները գրեթե չեն տարբերվում հավասարումներին վերաբերվող համապատասխան սահմանումներից:

$$A(x) > B(x), \quad A(x) < B(x), \quad A(x) \geq B(x), \quad A(x) \leq B(x)$$

տեսքի անհավասարությունները, որտեղ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը x-ից կախված արտահայտություններ են, անվանում են x փոփոխականով ***անհավասարումներ***:

x փոփոխականով անհավասարման ***մասնակի լուծում*** է կոչվում x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեք, որը բավարարում է այդ անհավասարությանը:

Անհավասարման ***լուծում*** է կոչվում նրա մասնակի բոլոր լուծումների բազմությունը:

Լուծել անհավասարում՝ նշանակում է գտնել նրա լուծումը կամ ապացուցել, որ այն լուծում չունի:

Ի տարբերություն հավասարման, «արմատ» հասկացությունն անհավասարման համար չի ներմուծվում:

Միևնույն փոփոխականով երկու անհավասարումներ կոչվում են ***համարժեք*** անհավասարումներ, եթե նրանց լուծումների բազմությունները համընկնում են (այլ կերպ ասած՝ եթե նրանք ունեն միևնույն լուծումը): Մասնավորապես, համարժեք են համարվում նաև լուծում չունեցող երկու անհավասարումներ:

Այն փաստը, որ $A_1(x) > B_1(x)$ և $A_2(x) > B_2(x)$ անհավասարումները համարժեք են, համառոտ գրառվում է այսպես՝

$$A_1(x) > B_1(x) \Leftrightarrow A_2(x) > B_2(x):$$

Հավասարումներ լուծելիս պարտադիր չեն համարում լուծման ընթացքում ամենուրեք պահպանել համարժեքությունը. այնտեղ հիմնականում ստանում են տրվածին հետևանք հավասարումներ, որտեղ միայն կարող են առաջանալ կողմնակի արմատներ, որոնք էլ հայտնաբերվում են ստուգումով:

Անհավասարումները լուծելիս, հիմնականում ստանում են անվերջ բազմություններ (միջակայք կամ միջակայքերի միավորում), որի պատճառով էլ անհնար է դառնում մասնակի լուծումների ստուգումը՝ անմիջական տեղադրությամբ: Այդ նկատառումով էլ, ի տարբերություն հավասարումների, անհավասարումը լուծելիս անհրաժեշտ է բոլոր քայլերում ***պահպանել համարժեքություն***:

Ապացուցելու համար, որ տրված երկու անհավասարումները համարժեք չեն, բավական է նշել փոփոխականի այնպիսի արժեք, որն այդ երկու անհավասարումներից մեկի լուծում է, իսկ մյուսին՝ ոչ: Օրինակ,

$$x^2+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{x} \text{ և } x^2<1$$

անհավասարումները համարժեք չեն, քանի որ $x=0$–ն բավարարում է երկրորդ անհավասարմանը, իսկ առաջինին չի բավարարում:

Անհավասարումների համարժեքությունը հիմնավորելու համար ավելի հաճախ օգտվում են ստորև ձևակերպված հիմնական կանոններից ու թեորեմներից, որոնք բխում են թվային անհավասարությունների հայտնի հատկություններից:

Ակնհայտ է, որ $A(x)>B(x)$ և $B(x)<A(x)$ անհավասարումները համարժեք են: $A(x)\geq B(x)$ անհավասարումը տեղի ունի x–ի այն և միայն այն արժեքների դեպքում, որոնց համար՝ կա՛մ $A(x)=B(x)$ կա՛մ $A(x)>B(x)$: Նշանակում է՝ $A(x)\geq B(x)$ անհավասարման լուծումը բերվում է $A(x)>B(x)$ անհավասարման և $A(x)=B(x)$ հավասարման լուծմանը: Նշված փաստերը թույլ են տալիս այստեղ սահմանափակվել $A(x)>B(x)$ տեսքի անհավասարման դիտարկմամբ:

$A(x)>B(x)$ անհավասարման ***թույլատրելի արժեքների բազմություն (ԹԱԲ)*** կոչվում է x փոփոխականի բոլոր այն արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում որոշված են (իմաստ ունեն) և՛ $A(x)$–ը, և՛ $B(x)$–ը, այսինքն՝ այդ արտահայտությունների թույլատրելի արժեքների բազմությունների հատումը: Նշանակենք այդ բազմությունը X–ով: Նշենք, որ անհավասարման լուծումների բազմությունը X–ի (ԹԱԲ–ի) ենթաբազմությունն է:

Թեորեմ 1: ***Եթե անհավասարման երկու մասերին ավելացնենք միևնույն $C(x)$ արտահայտությունը, որը որոշված է բոլոր $x\in X$ արժեքների դեպքում, ապա կստացվի տրվածին համարժեք անհավասարում:***

Այդպիսով, $A(x)>B(x)\Leftrightarrow A(x)+C(x)>B(x)+C(x)$, եթե $C(x)$–ը բավարարում է թեորեմի պայմանին:

Այս թեորեմից, մասնավորաբար, հետևում է՝

ա) $A(x)>B(x)\Leftrightarrow A(x)-B(x)>0$,

բ) $A(x)+C(x)>B(x)\Leftrightarrow A(x)>B(x)-C(x)$:

Թեորեմ 2: ***Եթե անհավասարման երկու մասերը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) այնպիսի $C(x)$ արտահայտությամբ, որն X-ին պատկանող բոլոր x-երի դեպքում դրական է, ապա կստացվի տրվածին համարժեք անհավասարում:***

Այդպիսով,

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow (x)\cdot C(x) > B(x)\cdot C(x) \quad \left(A(x) > B(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{C(x)} > \frac{B(x)}{C(x)} \right),$$

եթե $C(x)$-ը բավարարում է թեորեմի պայմանին:

Հետևանք: ***Եթե անհավասարման երկու մասերը բազմապատկենք (բաժանենք) միևնույն դրական թվով (թվի), ապա կստացվի տրվածին համարժեք անհավասարում:***

Թեորեմ 3: ***Եթե անհավասարման երկու մասերը բազմապատկենք (բաժանենք) միևնույն $C(x)$ արտահայտությամբ, որը բոլոր $x \in X$ արժեքների դեպքում բացասական է, և անհավասարման նշանը փոխարինենք հակառակ նշանով, ապա կստացվի տրվածին համարժեք անհավասարում:***

Այդպիսով, եթե ցանկացած $x \in X$ դեպքում $C(x) < 0$, ապա

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow \; A(x)\cdot C(x) < B(x)\cdot C(x) \; \left(A(x) > B(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{C(x)} < \frac{B(x)}{C(x)} \right):$$

Հետևանք: ***Եթե անհավասարման երկու մասերը բազմապատկենք (բաժանենք) միևնույն բացասական թվով (թվի) և անհավասարման նշանը փոխարինենք հակառակ նշանով, ապա կստացվի տրվածին համարժեք անհավասարում:***

Թեորեմ 4: ***Դիցուք, X բազմության ցանկացած x-ի դեպքում $A(x) \geq 0$ և $B(x) \geq 0$: Եթե $A(x) > B(x)$ անհավասարման երկու մասերը բարձրացնենք միևնույն բնական աստիճան, ապա կստացվի տրվածին համարժեք անհավասարում:***

Այսպիսով, եթե ցանկացած $x \in X$ թվի դեպքում $A(x) \geq 0$ և $B(x) \geq 0$ և $n \in N$, ապա

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow (A(x))^n > (B(x))^n :$$

Դիտողություն: *Կենտ n-երի դեպքում, առանց սահմանափակումների, կարող ենք պնդել՝*

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow (A(x))^n > (B(x))^n :$$

Ապացուցեք ինքնուրույն:

Մասնավորապես՝

$$A(x)>0 \Leftrightarrow (A(x))^n>0 \text{ և } A(x)<0 \Leftrightarrow (A(x))^n<0,$$

այսինքն՝ ցանկացած կենտ բնական n–ի դեպքում, երբ $A(x)\neq 0$, ապա $A(x)$–ը և $(A(x))^n$–ը միևնույն նշանի են: Վերջին փաստը հնարավորություն է տալիս անհավասարումները լուծելիս, որոշ դեպքերում, $(A(x))^n$ բազմապատկիչը, որտեղ n–ը կենտ թիվ է, փոխարինել $A(x)$–ով (կամ՝ հակառակը):

Օրինակ, $\dfrac{(x-3)^7(x+2)}{\sqrt[3]{2x+1}(4x+1)^3}<0$ անհավասարումը կարելի է փոխարինել իրեն համարժեք $\dfrac{(x-3)(x+2)}{(2x+1)(4x+1)}<0$ անհավասարումով:

Անհավասարումների համարժեքության հասկացությունը, նրա վերաբերյալ թեորեմներն առավել հասկանալի դառնալու համար բերենք մի քանի օրինակներ:

Պարզաբանենք, համարժե՞ք են արդյոք հետևյալ անհավասարումները.

1) $x^2>x$ և $x>1$: Ո՛չ, քանի որ $x=-1$–ը առաջին անհավասարման մասնակի լուծում է, իսկ երկրորդի համար՝ ոչ:

2) $\dfrac{3x-7}{x+2}\geq 5$ և $3x-7\geq 5(x+2)$: Ո՛չ, քանի որ $x=-4$–ը բավարարում է առաջին անհավասարությանը, բայց չի բավարարում երկրորդին:

3) $\dfrac{4x+6}{x^2-x+1}<2$ և $4x+6<2(x^2-x+1)$: Համարժեք են, քանի որ երկրորդ անհավասարումը ստացվել է առաջինից՝ նրա երկու մասերը բազմապատկելով ցանկացած x–ի դեպքում դրական արժեքներ ընդունող x^2-x+1 մեծությամբ (թեորեմ 2): Վերջին փաստը հետևում է $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ նույնությունից:

4) $\sqrt{6x-2}\geq x+1$ և $6x-2\geq (x+1)^2$: Համարժեք են, քանի որ առաջին անհավասարման ԹԱԲ–ի բոլոր x–երի դեպքում նրա երկու մասերը ոչբացասական են, և երկրորդ անհավասարումը ստացվել է նրանից՝ երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի (թեորեմ 4):

5) $\sqrt{2x+5}>x+1$ և $2x+5>(x+1)^2$: Համարժեք չեն, քանի որ $x=-2$–ն առաջին անհավասարման մասնակի լուծում է, սակայն երկրորդ անհավասարմանը չի բավարարում:

6) $|3x^2-7|\leq|5x+8|$ և $(3x^2-7)^2\leq(5x+8)^2$ անհավասարումները համարժեք են, քանի որ ցանկացած x–ի դեպքում առաջին անհավասարման երկու մասերը ոչբացասական են և երկրորդ անհավասարումը ստացվել է նրանից՝ երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով (թեորեմ 4):

Ինչպես հայտնի է, նույնական ձևափոխության դեպքում հնարավոր է, որ կատարվի արտահայտության ԹԱԲ-ի փոփոխություն: Օրինակ, նման անդամների միացման, կոտորակների կրճատման հետևանքով կարող է տեղի ունենալ արտահայտության ԹԱԲ-ի ընդլայնում: Հետևաբար, անհավասարումը լուծելու ընթացքում կատարվող նույնական ձևափոխությունը կարող է խախտել համարժեքությունը:

Օրինակ 1: $\sqrt{x-1}+2x>\sqrt{x-1}-4$ անհավասարման երկու մասերին ավելացնելով միևնույն $\varphi(x)=-\sqrt{x-1}$ արտահայտությունը, կստանանք $\sqrt{x-1}+2x-\sqrt{x-1}>\sqrt{x-1}-4-\sqrt{x-1}$ անհավասարումը, որը համարժեք է տրվածին (թեորեմ 1): Այնուհետև, նման անդամների միացումից հետո կունենանք՝ $2x>-4$, այսինքն՝ $x>-2$: Սակայն տրված անհավասարումը լուծում ունի միայն $x\geq 1$ պայմանով: Այստեղ նման անդամների միացումից հետո ընդարձակվեց ԹԱԲ-ը՝ [1; ∞)-ից ընդլայնվեց մինչև $R=(-\infty;+\infty)$-ը, որի պատճառով էլ խախտվեց համարժեքությունը:

Օրինակ 2: $\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}>0$ անհավասարման ձախ մասի կոտորակը կրճատելով $(x-3)$-ով, կունենանք $x+1>0$, որտեղից՝ $x>-1$: Ակնհայտ է, որ $x=3$-ը ստացված անհավասարման մասնակի լուծում է, բայց տրված անհավասարման մասնակի լուծում չէ (ավելին՝ չի պատկանում նրա ԹԱԲ-ին): Այսպիսով, կրճատման հետևանքով խախտվեց համարժեքությունը:

Հարցեր

1. Ո՞րն է փոփոխականով անհավասարման հասկացության սահմանումը:
2. Ի՞նչն են անվանում անհավասարման մասնակի լուծում:
3. Ի՞նչն են անվանում անհավասարման լուծում:
4. Ո՞ր անհավասարումներն են կոչվում համարժեք:
5. Ի՞նչ թեորեմներ կան անհավասարումների համարժեքության վերաբերյալ:

Առաջադրանքներ

Հետազոտել համարժեքության առումով (29–32)

29. ա) $2x+\dfrac{1}{x-4}>3+\dfrac{1}{x-4}$ և $2x>3$, բ) $2x+\frac{1}{x+4}>3+\frac{1}{x+4}$ և $2x>3$:

30. ա) $x^2+\sqrt{x}<2+\sqrt{x}$ և $x^2<2$,

բ) $2x+\sqrt{x-6}>15+\sqrt{x-6}$ և $2x>15$:

31. ա) $(x+2)x^2<(x+2)^2$ և $x^2<x+2$,

բ) $\frac{(2x+7)(x+3)^3}{x^2-9}\geq 0$ և $\frac{2x+7}{x-3}\geq 0$:

32. ա) $(4x-5)(x+3)^2>0$ և $4x-5>0$:

բ) $(x^2+4)(4-3x)\leq 0$ և $4-3x\leq 0$:

33. Ապացուցել, որ եթե n-ը կենտ թիվ է, ապա.

ա) $(f(x))^n+(g(x))^n>0 \Leftrightarrow f(x)+g(x)>0$,

բ) $(f(x))^n+(g(x))^n<0 \Leftrightarrow f(x)+g(x)<0$:

2. Մեկ փոփոխականով անհավասարումների համակարգեր և համախմբեր

Ասում են, որ մեկ փոփոխականով մի քանի անհավասարումներ կազմում են ***անհավասարումների համակարգ***, եթե պահանջվում է գտնել փոփոխականի բոլոր այն արժեքները, որոնք ***միաժամանակ*** բավարարում են այդ անհավասարումներից յուրաքանչյուրին:

Սահմանումից հետևում է, որ անհավասարումների համակարգի ***լուծումների բազմությունն*** այդ համակարգը կազմող բոլոր անհավասարումների լուծումների բազմությունների ***հատումն է***:

Եթե $A_1(x)>B_1(x)$ և $A_2(x)>B_2(x)$ անհավասարումները կազմում են անհավասարումների համակարգ, ապա նրանք գրվում են սյունակի տեսքով՝ ձևավոր փակագծի օգնությամբ.

$$\begin{cases} A_1(x)>B_1(x), \\ A_2(x)>B_2(x): \end{cases}$$

Որոշ դեպքերում համակարգ կազմող անհավասարումները կարելի է գրել մեկ տողով: Այսպես, եթե $A(x)>B(x)$ և $A(x)<C(x)$ անհավասարումները կազմում են համակարգ, ապա այդ համակարգը կարելի է գրառել,

այսպես կոչված, կրկնակի անհավասարման տեսքով՝ $B(x) < A(x) < C(x)$:

Ասում են, որ մեկ փոփոխականով մի քանի անհավասարումներ կազմում են ***անհավասարումների համախումբ***, եթե պահանջվում է գտնել փոփոխականի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է այդ անհավասարումներից ***գոնե մեկին***:

Սահմանումից հետևում է, որ անհավասարումների համախմբի ***լուծումների բազմությունն*** այդ համախումբը կազմող անհավասարումների լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Եթե $A_1(x) > B_1(x)$ և $A_2(x) > B_2(x)$ անհավասարումները կազմում են համախումբ, ապա նրանք գրառվում են կամ սյունակով՝ ուղղանկյունաձև փակագծի օգնությամբ՝

$$\left[\begin{array}{l} A_1(x) > B_1(x), \\ A_2(x) > B_2(x), \end{array}\right.$$

կամ մեկ տողում՝ «,» նշանի միջոցով՝

$$A_1(x) > B_1(x),\ A_2(x) > B_2(x):$$

Յուրաքանչյուր $A(x) \geq B(x)$ ոչ խիստ անհավասարումը $A(x) > B(x)$ խիստ անհավասարման և $A(x) = B(x)$ հավասարման համախումբ է և դրա համար էլ կարող է գրվել հետևյալ տեսքերից մեկով.

$$\left[\begin{array}{l} A(x) > B(x), \\ A(x) = B(x), \end{array}\right. \text{ կամ՝ } A(x) > B(x),\ A(x) = B(x):$$

Յուրաքանչյուր $A(x) \neq B(x)$ «ոչ հավասարությունը» կարելի է գրել երկու խիստ անհավասարումների տեսքով.

$$\left[\begin{array}{l} A(x) > B(x), \\ A(x) < B(x), \end{array}\right. \text{ կամ՝ } A(x) > B(x),\ A(x) < B(x):$$

Ասում են, որ մեկ փոփոխականով մի քանի անհավասարումների համակարգեր կազմում են ***անհավասարումների համակարգերի համախումբ***, եթե պահանջվում է գտնել փոփոխականի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է այդ համակարգերից ***առնվազն մեկին***:

Անհավասարումների համակարգերի (համախմբի) համարժեքության հասկացությունը սահմանվում է այնպես, ինչպես անհավասարումների համարժեքությունը:

Հարցեր

1. Բացատրել՝ «մեկ փոփոխականով մի քանի անհավասարումների համախմբի» հասկացության իմաստը:
2. Բացատրել՝ «մեկ փոփոխականով մի քանի անհավասարումների համակարգի» հասկացության իմաստը:

Առաջադրանքներ

Ճի՞շտ է, արդյոք, պնդումը (34–38)

34. ա) $(x-5)(x+7)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5>0, \\ x+7<0; \end{cases}$

բ) $(x-5)(x+7)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5<0, \\ x+7<0: \end{array}\right.$

35. ա) $\sqrt{x}(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 0, \\ x+3\geq 0; \end{array}\right.$ բ) $\sqrt{x}(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x+3\geq 0: \end{cases}$

36. ա) $x^2\geq 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 6, \\ x\geq -6; \end{cases}$ բ) $x^2\geq 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 6, \\ x\leq -6: \end{array}\right.$

37. ա) $x^2\leq 13 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \sqrt{13}, \\ x\leq -\sqrt{13}; \end{cases}$ բ) $x^2\leq 13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq \sqrt{13}, \\ x\geq -\sqrt{13}: \end{array}\right.$

38. ա) $x^2\geq 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 10, \\ x\leq -10; \end{array}\right.$ բ) $x^2\leq 100 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 10, \\ x\geq -10: \end{cases}$

3. Ռացիոնալ անհավասարումներ: Միջակայքերի մեթոդը

Դիտարկենք այնպիսի անհավասարումներ, որոնք պարունակում են միայն $p(x)\pm q(x)$, $p(x)\cdot q(x)$ կամ $\frac{p(x)}{q(x)}$ տեսքի արտահայտություններ, որտեղ $p(x)$–ը և $q(x)$–ը բազմանդամներ են: Ընդունված է այդպիսի անհավասարումներն անվանել ***ռացիոնալ*** անհավասարումներ:

Ռացիոնալ անհավասարումների օրինակներ են՝

$3(2-x)\le 4x$, $x^2-2x>3(x+1)^2$, $8x-\dfrac{1}{x}\le (x-1)\left(\dfrac{5}{x}-3\right)$, $\dfrac{4x^2-5}{x+2}\ge\dfrac{7x}{x-5}$:

Յուրաքանչյուր ռացիոնալ անհավասարում կարելի է բերել իրեն համարժեք ստանդարտ տեսքի հետևյալ անհավասարումներից մեկին.

$$A(x)>0;\quad A(x)<0;\quad A(x)\ge 0;\quad A(x)\le 0; \tag{1}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0;\quad \frac{A(x)}{B(x)}<0;\quad \frac{A(x)}{B(x)}\ge 0;\quad \frac{A(x)}{B(x)}\le 0, \tag{2}$$

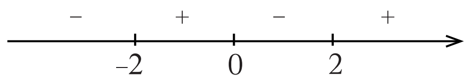
որտեղ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը բազմանդամներ են կամ՝ բազմանդամների արտադրյալ: Այդպիսի անհավասարումները հաճախ հաջողվում է լուծել, այսպես կոչված, ***միջակայքերի եղանակով***: Միջակայքերի մեթոդի էությունը հետևյալն է:

Թվային ուղղի վրա նշում են $A(x)=0$ և $B(x)=0$ հավասարումների բոլոր արմատները: Թվային ուղիղը այդ կետերով տրոհվում է վերջավոր թվով միջակայքերի: Միջակայքերից յուրաքանչյուրում $A(x)$-ը և $B(x)$-ը ***պահպանում են որոշակի նշան*** (այս կարևոր փաստի հիմնավորումը ընթերցողը կհանդիպի հետագայում, անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները թեման ուսումնասիրելիս): Հետևաբար, այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա (1) կամ (2) տեսքի անհավասարումներից յուրաքանչյուրի ձախ մասի նշանը որոշակի է. այն (նշանը) որոշելու համար բավական է տվյալ միջակայքից վերցնել որևէ թիվ և որոշել $A(x)$-ի (կամ $\dfrac{A(x)}{B(x)}$-ի) նշանը այդ արժեքի դեպքում: Ինչ վերաբերվում է $A(x)$-ի արմատներին, ապա խիստ անհավասարման (> կամ < նշաններով) դեպքում, դրանք, ակնհայտորեն, չեն պատկանում լուծումների բազմությանը, իսկ ոչ խիստ անհավասարման ($\ge$ կամ $\le$ նշաններով) դեպքում $A(x)$-ի ամեն մի արմատը ընդգրկվում է լուծումների բազմության մեջ, պայմանով, որ այն $B(x)$-ի արմատ չէ: Ակնհայտ է, որ $B(x)$-ի ոչ մի արմատ չի կարող բավարարել անհավասարմանը, քանի որ այդպիսի արժեքներից յուրաքանչյուրի դեպքում $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ արտահայտությունը որոշված չէ (անհավասարման ԹԱԲ-ին չեն պատկանում):

Դիտողություն: *Չպետք է կարծել, թե ցանկացած ռացիոնալ անհավասարում կարելի է լուծել միջակայքերի մեթոդով: Միջակայքերի մեթոդը կիրառելի է միայն այն դեպքում, երբ հայտնի են $A(x)$ և $B(x)$ բազմանդամների արմատների բազմությունը «մասնավորաբար, այն կարող է լինել դատարկ»: Սակայն, միշտ չէ, որ հնարավոր է գտնել տվյալ բազմանդամի արմատները:*

Օրինակ 1: Լուծենք $x^3-4x<0$ անհավասարումը:

Լուծում: Գտնենք անհավասարման ձախ մասի՝ $P(x)=x^3-4x$ բազմանդամի արմատները, նախապես այն ներկայացնելով գծային բազմապատկիչների արտադրյալի տեսքով՝ $x(x-2)(x+2)=0$: Այստեղից կունենանք՝ $x=-2;\ x=0;\ x=2$: Ստացված կետերով թվային ուղիղը տրոհվում է չորս միջակայքերի՝ $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;\infty)$: Որոշենք $P(x)$ ֆունկցիայի նշանը այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում: $(-\infty;-2)$ միջակայքից վերցնելով $x=-3$-ը կնկատենք, որ $P(-3)<0$, նշանակում է՝ այդ միջակայքում $P(x)<0$: $(-2;0)$-ից վերցնելով $x=-1$, կունենանք՝ $P(-1)>0$, նշանակում է՝ այդ միջակայքում $P(x)>0$: Վարվելով նույն կերպ, կունենանք՝ $(0;2)$



Նկ. 9

միջակայքում $P(x)<0$ և $(2;\infty)$ միջակայքում $P(x)>0$: Ստացված արդյունքները պայմանականորեն պատկերենք թվային ուղղի վրա (նկ. 9):

Մեզ անհրաժեշտ է լուծել $P(x)<0$ անհավասարումը: Վերոհիշյալ դատողություններից պարզ երևում է, որ այդ անհավասարումը տեղի ունի միայն $(-\infty;-2)$ և $(0;2)$ միջակայքերում: Այդ միջակայքերի միավորումն էլ իրենից կներկայացնի տրված անհավասարման մասնակի լուծումների բազմությունը: Պատասխանը կարելի է գրել հետևյալ երկու ձևերից մեկով.

$$(-\infty;-2)\cup(0;2) \text{ կամ՝ } x<-2;\ \ 0<x<2:$$

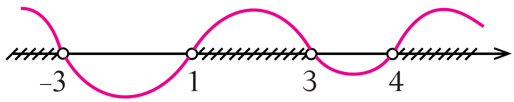
Օրինակ 2: Լուծենք $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-9}>0$ անհավասարումը:

Լուծում: Անհավասարման ձախ մասի կոտորակի համարիչը և հայտարարը վերլուծելով գծային բազմապատկիչների, կունենանք՝

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+3)(x-3)}>0 \qquad (1)$$

Թվային ուղղի վրա պատկերենք համարիչը և հայտարարը զրո դարձնող x-երի արժեքները՝ $x=-3;\ x=1;\ x=3;\ x=4$: Ի տարբերություն օրինակ 1-ի, այստեղ կվարվենք այլ կերպ (ի դեպ, գործնականում ավելի կիրառելի): Այդ կետերով թվային ուղիղը տրոհվում է հինգ միջակայքերի: Նկատենք, որ $x>4$ դեպքում համարիչի և հայտարարի բոլոր գծային արտադրիչները դրական են, հետևաբար $(4;\infty)$ միջակայքում (1) հավասարման ձախ մասի արտահայտությունը՝ $A(x)>0$: Եթե x փոփոխականը $(4;\infty)$ միջակայքից անցնում է $(3;4)$ միջակայք, ապա նշված գծային արտադրիչներից միայն $(x-4)$-ն է փոխում իր նշանը, ուստի այդ միջակայքում $A(x)<0$: Այնուհետև, եթե x-ը գտնվի $(1;3)$ միջակայքում, միայն $(x-3)$ արտադրիչը կփոխի իր նշանը, հետևաբար, այդ միջակայքում $A(x)>0$: Նույն դատողությամբ կունենանք՝ $(-3;1)$ միջակայքում $A(x)<0$ և $(-\infty;-3)$ միջակայքում $A(x)>0$:

Թվային ուղղի նշված կետերով անցկացնենք կոր գիծ (***նշանների կոր***), այնպես, որ այն միջակայքում, որտեղ $A(x)>0$, կորի համապատասխան մասն ընկած լինի



Նկ. 10

թվային ուղղից վերև, իսկ այն միջակայքում, որտեղ $A(x)<0$, համապատասխան մասերը՝ ներքևում (նկ. 10): Քանի որ մեզ անհրաժեշտ է լուծել $A(x)>0$ անհավասարումը, ուստի տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը (որը ստվարագծված է) կլինի՝

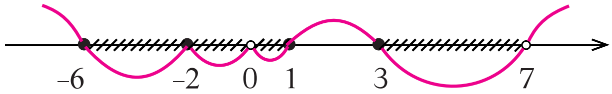
$$(-\infty;-3)\cup(1;3)\cup(4;\infty):$$

Օրինակ 3: Լուծենք $\dfrac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3}\le 0$ անհավասարումը:

Լուծում: Կետ 1-ի թեորեմ 4-ի վերաբերյալ արված դիտողության համաձայն $(x-3)^5$ և $(x-7)^3$ բազմապատկիչները կարելի է փոխարինել, համապատասխանաբար, $(x-3)$-ով և $(x-7)$-ով.

$$\frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)(x+6)}{x^2(x-7)}\le 0:$$

Ակնհայտ է, որ անհավասարման ձախ մասի կոտորակի համարիչի զրոները՝ $-6; -2; 1; 3$ թվերը բավարարում են անհավասարությանը: Թվային ուղղի վրա նշենք համարիչի և հայտարարի զրոները, ընդ որում հայտարարի զրոները կնշենք լուսավոր օղակներով (այդ կետերը չեն պատկանում լուծումների բազմությանը): Նկատենք, որ $(x+2)^4$ և x^2 բազմապատկիչները չեն փոխում իրենց նշանները (ցանկացած x-ի դեպքում այդ մեծությունները ոչբացասական են): Ելնելով նախորդ օրինակի լուծման ընթացքի պարզ դատողություններից, հեշտությամբ կգծենք նշանների կորը (նկ. 1)։



Նկ. 1

Հետևաբար, տրված անհավասարման լուծումն է՝

$$[-6;0)\cup(0;1]\cup[3;7)\,:$$

Ներկայացնենք այդ անհավասարման լուծման ընթացքի համառոտ գրառումը.

$$\frac{(x-1)(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; \\ \begin{cases} x\ne 0, \\ \dfrac{(x-1)(x-3)(x+6)}{x-7}\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; \\ \begin{cases} x\ne 0, \\ x\in[-6;1]\cup[3;7) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; \\ x\in[-6;0)\cup(0;1]\cup[3;7) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-6;0)\cup(0;1]\cup[3;7)\,:$$

Օրինակ 4: Լուծենք $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\le\dfrac{1-2x}{x^3+1}$ անհավասարումը:

Լուծում: Տրված անհավասարումն արտագրենք այսպես՝

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1-2x}{x^3+1}\le 0\,,$$

որը համարժեք է տրվածին (թեորեմ 1):

Ձախ մասը ներկայացնենք իրեն նույնաբար հավասար մեկ կոտորակի տեսքով (որով չի խախտվում համարժեքությունը).

$$\frac{x^2-x+1-2(x+1)-1+2x}{x^3+1}\le 0\,:$$

Համարիչում նման անդամների միացումից հետո (որով ևս չի խախտ-վում համարժեքությունը), կունենանք՝

$$\frac{x^2-x-2}{x^3+1}\le 0\,: \qquad (1)$$

Դժվար չէ նկատել, որ x^3+1 և $x+1$ արտահայտություններն ունեն միևնույն նշանը:

Հետևաբար, (1) անհավասարումը համարժեք է հետևյալ անհավասարմանը՝

$$\frac{x^2-x-2}{x+1}\le 0: \qquad (2)$$

Քանի որ x^2-x-2 եռանդամի արմատներն են –1-ը և 2-ը, ուստի (2) անհավասարումը համարժեք է հետևյալ անհավասարմանը՝

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}\le 0:$$

Վերջին անհավասարման ձախ մասի կոտորակը կրճատելով $(x+1)$-ով, $x\ne -1$ պայմանով կունենանք դրան համարժեք անհավասարում՝

$$x-2\le 0\text{, որտեղից՝ } x\le 2:$$

Այսպիսով, տրված անհավասարման լուծումն է՝ $(-\infty;-1)\cup(-1;2]$:

Օրինակ 2-ի լուծման համառոտ գրառումը կատարեք ինքնուրույն:

Հարցեր

1. Ո՞ր անհավասարումներն են անվանում ռացիոնալ:
2. Ռացիոնալ անհավասարումների լուծման ի՞նչ հայտնի մեթոդ կա:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումները (39–49).

39. ա) $x(x-5)^2>0$, բ) $(x+3)(x-4)^2<0$:

40. ա) $(5x-2)(x+3)(6-x)<0$, բ) $(x-2)^2(x+5)(2x-9)\ge 0$:

41. ա) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^5(x+2)^4<0$, բ) $(2x-5)(x^2-4)(x^3+8)\le 0$:

42. ա) $x^3-64x>0$, բ) $x^2-7x<3$:

43. ա) $x^2-5x+7>0$, բ) $x^4+8x^3+12x^2\ge 0$:

44. ա) $(x-5)(x^2-x+1)<0$, բ) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\le 0$:

45. ա) $\dfrac{(x+2)(5x-2)}{4-x}>0$, բ) $\dfrac{(x+1)(x+3)(x+5)}{(1-x)(3-x)(5-x)}>0$:

46. ա) $(2x^2 - x - 5)(x^2 - 9)(x^2 - 3x) \le 0$, բ) $\dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 16)}{x^2 + x} < 0$:

47. ա) $\dfrac{3x-2}{2x-3} < 3$, բ) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$:

48. ա) $\dfrac{2x^2 + 18x - 4}{x^2 + 9x + 8} > 2$, բ) $\dfrac{7-2x}{x^2 - 2x + 3} \ge 1$:

49. ա) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} > 3$, բ) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2}$:

4. Մոդուլով անհավասարումներ

Այսպես են անվանում այն անհավասարումները, որոնց մեջ առկա են փոփոխականը մոդուլի նշանի տակ պարունակող արտահայտություններ:

Բոլոր այն նկատառումները, որ արվել են մոդուլով հավասարումները լուծելիս ուժի մեջ են նաև այստեղ:

Նշենք մոդուլով անհավասարումներին վերաբերվող մի քանի փաստեր, որոնք լայնորեն կիրառվում են այդպիսի անհավասարումներ լուծելիս:

1) Եթե $a < 0$, ***ապա*** $|f(x)| < a$ ***անհավասարումը լուծում չունի, քանի որ ցանկացած թույլատրելի x-ի դեպքում*** $|f(x)| \ge 0$ ***:***

2) Եթե $a < 0$, ***ապա*** $|f(x)| > a$ ***անհավասարման լուծումների բազմությունը նրա ԹԱԲ-ն է:***

3) Եթե $a > 0$, ***ապա***

$$|f(x)| < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a: \end{cases} \qquad (1)$$

4) Եթե $a > 0$, ***ապա*** $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a, \\ f(x) > a: \end{array}\right.$:

5) ա) $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 < (g(x))^2$,

բ) $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2$:

6) ա) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x); \end{cases}$

բ) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x): \end{cases}$

6)-ի ա) և բ) պեպքի անհավասարումները լուծելիս կարելի է օգտվել նաև հետևյալ պնդումներից՝

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x), \\ f(x) > g(x): \end{array}\right.$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x): \end{cases}$$

Օրինակ 1: Լուծենք $|1-5x| < 3x+9$ անհավասարումը:

Լուծում: 1-ին եղանակ: Ելնելով 6)-ի բ) հատկությունից, կարող ենք գրել՝

$$|1-5x| < 3x+9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-5x \ge 0, \\ 1-5x < 3x+9; \end{cases} \\ \begin{cases} 1-5x < 0, \\ 5x-1 < 3x+9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1/5, \\ x > -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1/5, \\ x < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x \le 1/5, \\ 1/5 < x < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-1;5):$$

2-րդ եղանակ: Լուծենք՝ ելնելով (6″) պնդումից.

$$|1-5x| < 3x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-5x < 3x+9, \\ 1-5x > -3x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;5):$$

Օրինակ 2: Լուծենք $|6x-7| > |5-2x|$ անհավասարումը:

Լուծում: 5)-ի բ) հատկության համաձայն կարող ենք գրել.

$$|6x-7| > |5-2x| \Leftrightarrow (6x-7)^2 > (5-2x)^2 \Leftrightarrow (6x-7)^2 - (5-2x)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((6x-7)-(5-2x))((6x-7)+(5-2x)) > 0 \Leftrightarrow (8x-12)(4x-2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) > 0:$$

Վերջին անհավասարումը լուծելով միջակայքերի եղանակով, կստանանք պատասխանը՝

$$x \in (-\infty;\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2};\infty):$$

Քննարկենք այն դեպքը, երբ անհավասարումը պարունակում է մեկից ավելի մոդուլներով արտահայտություններ: Այդպիսի անհավասարումները, ընդհանուր առմամբ, լուծվում են, այսպես կոչված, ***միջակայքերի մեթոդով***:

Օրինակ 3: Լուծենք $|x-4| + |2x+6| > 10$ անհավասարումը:

Լուծում: Թվային ուղղի վրա նշենք այն կետերը, որոնց դեպքում մոդուլների նշանների տակ գտնվող արտահայտությունները հավասարվում են զրոյի: Այդ կետերն են՝ –3-ը և 4-ը: Թվային ուղիղն այդ կետերով տրոհվում է

$$(-\infty;-3),\ [-3;4]\ \text{և}\ (4;\infty)$$

միջակայքերի: Տրված անհավասարումը դիտարկելով այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում, կստանանք երեք համակարգերի հետևյալ համախումբը՝

$$\begin{cases} x<-3, \\ -(x-4)-(2x+6)>10; \end{cases} \begin{cases} -3\le x\le 4, \\ -(x-4)+(2x+6)>10; \end{cases} \begin{cases} x>4, \\ (x-4)+(2x+6)>10: \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>4, \\ (x-4)+(2x+6)>10: \end{cases}$$

Առաջին համակարգից կստանանք՝ $x<-4$, երկրորդից՝ $0\le x\le 4$, երրորդից՝ $x>4$: Միավորելով այդ միջակայքերը, կստանանք տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը՝ $(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$:

Օրինակ 4: Լուծենք $|4x-7|>5$ անհավասարումը:

Լուծում: (2) պնդման համաձայն կարող ենք գրել՝

$$|4x-7|>5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-7<-5, \\ 4x-7>5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{2}, \\ x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(3;\infty):$$

Օրինակ 5: Լուծենք $|3x^2-x|<2$ անհավասարումը:

Լուծում: (1) պնդման համաձայն կարող ենք գրել՝

$$|3x^2-x|<2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x>-2, \\ 3x^2-x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x+2>0, \\ 3x^2-x-2<0: \end{cases}$$

Վերջին համակարգի առաջին անհավասարումը տեղի ունի ցանկացած x-ի դեպքում, քանի որ $3x^2-x+2$ եռանդամի տարբերիչը բացասական է: Երկրորդ անհավասարման ձախ մասի եռանդամի արմատներն են $-\frac{2}{3}$-ը և 1-ը, հետևաբար նրա լուծումների բազմությունը $(-\frac{2}{3};1)$ միջակայքն է, որը և տրված անհավասարման լուծումների բազմությունն է:

Օրինակ 6: Լուծենք $\big|2-|3-2x|\big|>4$ անհավասարումը:

Լուծում: Սկզբում ազատվենք «արտաքին» մոդուլից՝ օգտվելով 4) հատկությունից.

$$\big|2-|3-2x|\big|>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-|3-2x|<-4, \\ 2-|3-2x|>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3-2x|>6, \\ |3-2x|<-2: \end{array}\right.$$

Վերջին համախմբի երկրորդ անհավասարումը, ակնհայտորեն, լուծում չունի (տես 1) հատկությունը), իսկ առաջին անհավասարումը, ըստ 4) հատկության, համարժեք է հետևյալ համախմբին՝

$$3-2x<-6;\quad 3-2x>6,$$

որտեղից կստանանք՝ $x\in(-\infty;-\frac{3}{2})\cup(\frac{9}{2};\infty)$, որը նաև տրված անհավասարման լուծումների բազմությունն է:

Հիշեցնենք, որ առայժմ մենք քննարկում ենք միայն այնպիսի մոդուլով անհավասարումներ, որոնք բերվում են ռացիոնալ անհավասարումների:

Հարցեր

1. Որո՞նք են կոչվում մոդուլով անհավասարումներ:
2. Ի՞նչ պնդումներ են կիրառվում՝ մոդուլով անհավասարումները լուծելիս:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումները (50-62).

50. ա) $|x-5|>8$, բ) $|2x-1|<7$:

51. ա) $|4x+1|\geq 9$, բ) $|5x-9|\leq 6$:

52. ա) $|2x-1|<|4x+1|$, բ) $|1-3x|\geq|2x+3|$:

53. ա) $|4-3x|\geq 2-x$, բ) $|x+8|<3x-1$:

54. ա) $|6x^2-2x+1|\leq 1$, բ) $|x^2-3x+1|>5$:

55. ա) $x^2+7|x|-8\leq 0$, բ) $2x^2+|x|\geq 36$:

56. ա) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|>3$, բ) $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|\leq 3$:

57. ա) $|x^2-3x-15|<2x^2-x$, բ) $|4x^2-x-7|>-x^2+x-1$:

58. ա) $3x^2-|x-3|>9x-2$, բ) $|x^2-3x+3|\leq 2x^2+5x+10$:

59. ա) $|2x+1|+3>|x-2|$, բ) $|3x-1|+|2x-3|<2+|x+5|$:

60. ա) $\big||x-5|+1\big|\geq 7$, բ) $\big||x-2|-x+3\big|<5$:

61. ա) $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$, բ) $\frac{x^2-|2x-3|}{x^2-|x-2|}\leq 1$:

62*. $|x^9-x|+|x^8-x^7|\leq|x^9-x^8+x^7-x|$:

5. Իռացիոնալ անհավասարումներ

Դիտարկենք այնպիսի անհավասարումներ, որոնց մեջ փոփոխականը առնվազն մեկ տեղում գտնվում է արմատանշանի տակ, կամ ռացիոնալ կոտորակային ցուցիչով աստիճանի հիմքում[4]: Այդպիսի անհավասարումներն անվանում են ***իռացիոնալ***:

Իռացիոնալ անհավասարումները լուծելիս, հիմնականում կիրառում են նույն հնարները, ինչ իռացիոնալ հավասարումները լուծելիս (անհավասարման երկու մասերը բարձրացվում են միևնույն բնական աստիճան, նոր փոփոխականի փոխարինում և այլն): Այդպիսի անհավասարումները, սովորաբար, բերվում են ռացիոնալ անհավասարումների: Ի տարբերություն իռացիոնալ հավասարումների, իռացիոնալ անհավասարաումները լուծելիս անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր քայլում պահպանել համարժեքությունը (նման անհավասարումները հիմնականում ունեն անվերջ բազմությամբ լուծումներ):

Իռացիոնալ անհավասարումների երկու մասերը բնական աստիճան բարձրացնելիս միշտ չէ, որ ստացված անհավասարումը համարժեք է տրվածին: Օրինակ, $\sqrt{x} \le 3$ անհավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելիս ստացված $x \le 9$ անհավասարումը համարժեք չէ սկզբնականին (ինչո՞ւ): Այստեղ անհրաժեշտ է հաշվի առնել նաև տրված անհավասարման թաբ-ը, այն է՝ $x \ge 0$: Սակայն $\sqrt{x} \ge 3$ անհավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելու հետևանքով ստացված $x \ge 9$ անհավասարումը համարժեք է տրվածին: Այստեղ, ի տարբերություն առաջին անհավասարման, կարող ենք չնշել թաբ-ը (չէ՞ որ $x \ge 9$ անհավասարումից հետևում է $x \ge 0$ անհավասարումը): Այսպիսով, ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝

$$\sqrt{x} \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 9, \\ x \ge 0: \end{cases} \qquad \sqrt{x} \ge 3 \Leftrightarrow x \ge 9:$$

$\sqrt{x} \ge -3$ և $\sqrt{x} \le -3$ անհավասարումները լուծելիս չի կարելի երկու մասերը բարձրացնել քառակուսի, քանի որ դրանց աջ մասում գտնվող թվերը բացասական են: Մյուս կողմից, դժվար չէ հասկանալ, որ նրանիցից առաջինի լուծումների բազմությունը նրա թաբ-ն է, իսկ երկրորդ անհավասարումը լուծում չունի (բացատրեք, ինչո՞ւ): Կարելի է ապացուցել հետևյալ պնդումը՝

---

[4] *Ենթադրվում է, որ անհավասարման մյուս անդամները կամ հաստատուններ են, կամ՝ փոփոխականի նկատմամբ ռացիոնալ արտահայտություններ:*

$$\sqrt{f(x)} \geq a \ (a>0) \Leftrightarrow f(x) \geq a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} \leq a \ (a>0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq a^2; \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq a \ (a \leq 0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0;$$

$$\sqrt{f(x)} \leq a \ (a<0) \Leftrightarrow x \in \varnothing:$$

Դիտարկենք

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \text{ և } \sqrt{f(x)} > g(x)$$

տեսքի անհավասարումներ, որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը x փոփոխականի նկատմամբ ռացիոնալ արտահայտություններ են: Այդպիսի անհավասարումները լուծելիս կարելի է օգտվել հետևյալ երկու թեորեմներից՝

1^0. $$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^2: \end{cases}$$

2^0. $\sqrt{f(x)} > g(x)$ անհավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգերի համախմբին՝

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0: \end{cases}$$

Օրինակ 1: Լուծենք հետևյալ անհավասարումը՝

$$\sqrt{2x-x^2} < 5-x:$$

Լուծում: 1^0 թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել՝

$$\sqrt{2x-x^2} < 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x>0, \\ 2x-x^2 \geq 0, \\ 2x-x^2 < (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ x(x-2) \leq 0, \\ 2x^2-12x+25>0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ x \in [0;\ 2], \\ x \in (-\infty;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;\ 2]$$

Օրինակ 2: Լուծենք հետևյալ անհավասարումը՝

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}:$$

Լուծում: Անհավասարման թաք-ը որոշվում է $2\le x\le 3$ կրկնակի անհավասարությամբ: Անհավասարման երկու մասերը կարող ենք բարձրացնել քառակուսի միայն այն դեպքում, երբ նրա երկու մասերը ոչբացասական են: Սակայն այս օրինակում այդպես չէ: Իրոք, քանի որ $2\le x\le 3$, ապա $1\le x-1\le 2$ և $3\le 6-x\le 4$: Իսկ դա նշանակում է, որ $\sqrt{x-1}<\sqrt{6-x}$, այսինքն $\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}<0$: Մյուս կողմից, $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}>0$ $(\forall x\in[2;\,3])$: Հետևաբար, $2\le x\le 3$ հատվածի ցանկացած x-ի դեպքում տրված անհավասարումը տեղի ունի: Այսպիսով, լուծումների որոնելի բազմությունը $[2;\,3]$ հատվածն է:

Օրինակ 3: Լուծենք $\sqrt{2x+14}>x+3$ անհավասարումը:

Լուծում: Ելնելով 2^0 պնդումից, կարող ենք գրել՝

$$\sqrt{2x+14}>x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3<0,\\ 2x+14\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x+3\ge 0,\\ 2x+14>(x+3)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\ x\ge -7,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -3,\\ x^2+4x-5<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-7\le x<-3,\\ \begin{cases}x\ge -3,\\ -5<x<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-7\le x<-3,\\ -3\le x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-7;1):$$

Օրինակ 4: Լուծենք $3\sqrt{x}-\sqrt{5x+5}>1$ անհավասարումը:

Լուծում: Ունենք՝

$$3\sqrt{x}-\sqrt{5x+5}>1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}>\sqrt{5x+5}+1 \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x}\right)^2>\left(\sqrt{5x+5}+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0,\\ 9x>5x+6+2\sqrt{5x+5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0,\\ 2x-3>\sqrt{5x+5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0,\\ 2x-3\ge 0,\\ (2x-3)^2>5x+5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0,\\ x\ge \dfrac{3}{2},\\ 4x^2-17x+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0,\\ x\ge \dfrac{3}{2},\\ x\in\left(-\infty;\,\dfrac{1}{4}\right)\cup(4;\infty)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(4;\,\infty):$$

Վերևում քննարկված օրինակները պարունակում են թվաբանական քառակուսի արմատներ: Իռացիոնալ անհավասարման երկու մասերը ցանկացած միևնույն զույգ աստիճան բարձրացնելիս առաջնորդվում են նույն դատողություններով, ինչ քառակուսի բարձրացնելիս: Իսկ եթե տրված անհավասարման երկու մասերը բարձրացնում են կենտ աստիճան, ապա ստացվում է սկզբնական համարժեք անհավասարում: Օրինակ՝

$$\sqrt[3]{x^3-6x} \geq x-2 \Leftrightarrow x^3-6x \geq (x-2)^3:$$

Օրինակ 5: Լուծենք հետևյալ անհավասարումը՝

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}:$$

Լուծում: Անհավասարման ձախ մասն իմաստ ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $|x| \leq \frac{1}{2}$ և $x \neq 0$:

Եթե $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, ապա տրված անհավասարման ձախ մասը բացասական է: Հետևաբար, այդ միջակայքում լուծում չկա:

Դիցուք՝ $0 < x \leq \frac{1}{2}$: Այս դեպքում, որոշ ձևափոխություններից հետո կստանանք՝

$$\sqrt{1-4x^2} < 1-\frac{3}{2}x:$$

Նշված պայմանով վերջին անհավասարման երկու մասերը ոչբացասական են, դրա շնորհիվ էլ քառակուսի բարձրացնելուց կստանանք համարժեք անհավասարում՝

$$1-4x^2 < 1-3x+\frac{9}{4}x^2 \ \left(0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ պայմանով}\right):$$

Վերջին անհավասարումը համարժեք է

$$\frac{25}{4}x^2 > 3x$$

անհավասարմանը: Հաշվի առնելով $0 < x \leq \frac{1}{2}$ պայմանը, կունենանք վերջնական արդյունքը՝ $x \in \left(\frac{12}{25}; \frac{1}{2}\right]$:

Դիտողություն: ***Թյուրիմացություն է կարծել, որ ցանկացած իռացիոնալ անհավասարում լուծելիս պարտադիր պետք է գտնել նրա թաբ-ը: Օրինակ՝***

$$\sqrt[4]{x^8+x-5} \geq x^2$$

անհավասարման թաք-ը որոշելը ոչ միայն անհրաժեշտ չէ, այլ նաև՝ անհնարին: Մինչդեռ այդ անհավասարումը լուծվում է անմիջապես, առանց դժվարության՝

$$\sqrt[4]{x^8+x-5} \geq x^2 \Leftrightarrow x^8+x-5 \geq x^8 \Leftrightarrow x \geq 5:$$

Օրինակ 6: Լուծենք հետևյալ անհավասարումը՝

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}:$$

Լուծում: Անհավասարման ձախ մասն իմաստ ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $|x| \leq \frac{1}{2}$ և $x \neq 0$:

Եթե $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, ապա տրված անհավասարման ձախ մասը բացասական է: Հետևաբար, այդ միջակայքում լուծում չկա:

Դիցուք՝ $0 < x \leq \frac{1}{2}$: Այս դեպքում, որոշ ձևափոխություններից հետո կստանանք՝

$$\sqrt{1-4x^2} < 1-\frac{3}{2}x:$$

Նշված պայմանով վերջին անհավասարման երկու մասերը ոչբացասական են, դրա շնորհիվ էլ քառակուսի բարձրացնելուց կստանանք համարժեք անհավասարում՝

$$1-4x^2 < 1-3x+\frac{9}{4}x^2 (0 < x \leq \frac{1}{2}):$$

Վերջին անհավասարումը համարժեք է

$$\frac{25}{4}x^2 > 3x$$

անհավասարմանը: Հաշվի առնելով $0 < x \leq \frac{1}{2}$ պայմանը, կունենանք վերջնական արդյունքը՝ $x \in \left(\frac{12}{25}; \frac{1}{2}\right]$:

Դիտողություն: *Թյուրիմացություն է կարծել, որ ցանկացած իռացիոնալ անհավասարում լուծելիս պարտադիր պետք է գտնել նրա թաք-ը: Օրինակ՝*

$$\sqrt[4]{x^8+x-5} \geq x^2$$

անհավասարման թաբ-ը որոշելը ոչ միայն անհրաժեշտ չէ, այլ նաև՝ անհնարին: Մինչդեռ այդ անհավասարումը լուծվում է անմիջապես, առանց դժվարության՝

$$\sqrt[4]{x^8+x-5} \geq x^2 \Leftrightarrow x^8+x-5 \geq x^8 \Leftrightarrow x \geq 5:$$

Օրինակ 7: Լուծենք հետևյալ անհավասարումը՝

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x} > \sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}:$$

Լուծում: Անհավասարման թաբ-ը որոշվում է $2 \leq x \leq 3$ կրկնակի անհավասարությամբ: Անհավասարման երկու մասերը կարող ենք բարձրացնել քառակուսի միայն այն դեպքում, երբ նրա երկու մասերը ոչբացասական են: Սակայն այս օրինակում այդպես չէ: Իրոք, քանի որ $2 \leq x \leq 3$, ապա $1 \leq x-1 \leq 2$ և $3 \leq 6-x \leq 4$: Իսկ դա նշանակում է, որ $\sqrt{x-1} < \sqrt{6-x}$, այսինքն՝ $\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x} < 0$: Մյուս կողմից, $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} > 0 \ \forall x \in [2; 3]$: Հետևաբար, $2 \leq x \leq 3$ հատվածի ցանկացած x-ի դեպքում տրված անհավասարումը տեղի ունի: Այսպիսով, լուծումների որոնելի բազմությունը $[2; 3]$:

Հարցեր

1. Ո՞ր անհավասարումն են անվանում իռացիոնալ:
2. Ինչպե՞ս են լուծվում $\sqrt{f(x)} < g(x)$ և $\sqrt{f(x)} > g(x)$ տեսքի անհավասարումները:

Առաջադրանքներ

63. Համարժե՞ք են, արդյոք, հետևյալ անհավասարումները.

ա) $x-1 \leq \sqrt{x}$ և $(x-1)^2 \leq x$, բ) $x+1 \leq \sqrt{x}$ և $(x+1)^2 \leq x$,

գ) $\sqrt{x+7} \geq x$ և $x+7 \geq x^2$, դ) $\sqrt[4]{x^4+4x^2-1} > x^2$ և $4x^2 > 1$:

64. Ճի՞շտ է, արդյոք, պնդումը.

ա) $\sqrt{f(x)} \le |g(x)| \Leftrightarrow f(x) \le (g(x))^2$, բ) $\sqrt{f(x)} > |g(x)| \Leftrightarrow f(x) > (g(x))^2$,

գ) $\sqrt[5]{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow f(x) \le (g(x))^5$, դ) $\sqrt{f(x)} \ge -|g(x)| \Leftrightarrow f(x) \ge 0$ ։

65. Ապացուցել պնդումը.

ա) $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g(x), \end{cases}$ բ) $\sqrt{f(x)} \ge |g(x)| \Leftrightarrow f(x) \ge (g(x))^2$,

գ) $\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge 0, \\ f(x) \le (g(x))^2, \end{cases}$ դ) $\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge (g(x))^2 \end{cases} \end{array} \right.$ ։

Լուծել անհավասարումը (66–89).

66. $\sqrt{4x+1} > 3$ ։

67. $\sqrt{x-3} < 2$ ։

68. $\sqrt{x-x^2} \ge 0,2\sqrt{6} - 0,5$ ։

69. $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$ ։

70. $\sqrt{x^2-2x-3} < \frac{\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{3}$ ։

71. $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} \ge 2$ ։

72. $\sqrt{\frac{2x-1}{3x-2}} \le 3$ ։

73. $\sqrt{10-3x} \ge x-2$ ։

74. $\sqrt{2x+10} < 3x-5$ ։

75. $\sqrt{x^2-3x-4} < x-2$ ։

76. $\sqrt{2x+9} > x+3$ ։

77. $\sqrt{x^2-4x} > x-3$ ։

78. $\sqrt{5+4x-x^2} \ge -x^2+5x-8$ ։

79. $\sqrt{15+2x-x^2} > 10x-x^2-25$ ։

80. $\sqrt{9-x} + \sqrt{x-1} < 4$ ։

81. $\sqrt{x+3} \ge \sqrt{x-4} + 2$ ։

82. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \le 1$ ։

83. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} < \sqrt{4x+5}$ ։

84. $(x-3)\sqrt{(2-x)(x-5)} \ge 0$ ։

85. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$ ։

86. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-2} < 0$ ։

87. $\frac{2x^2-9x-11}{\sqrt{x+2}} \ge 0$ ։

88. $\frac{3}{x} + 1 < \sqrt{\frac{9}{x^2} - 3}$ ։

89. $6 \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x}} \ge \frac{10x-1}{x}$ ։

90. Գտնել $\sqrt{3(11-x)} > 5-x$ անհավասարման՝ ամբողջ թվով արտահայտված ամենամեծ լուծումը:

91. Գտնել $\sqrt{3-x} - 2x \geq 9$ անհավասարման ամենամեծ լուծումը:

92. Գտնել $\sqrt{-x^2-8x-12} > x+4$ անհավասարությանը բավարարող բոլոր ամբողջ թվերի միջին թվաբանականը:

Ապացուցել, որ անհավասարումը լուծում չունի.

93. $\sqrt[4]{x^2+16} + \sqrt{x^2-4x+13} \leq 5$:

§ 3. ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դիտարկենք

$$2a-1=x^2 \tag{1}$$

հավասարությունը: Այդ հավասարությունը կարելի է դիտարկել որպես երկու՝ a և x փոփոխականներով (անհայտներով) հավասարում: Դժվար չէ կռահել, որ այդ դեպքում նրա լուծումների բազմությունը բաղկացած կլինի

$$x=c, \quad a=\frac{c^2+1}{2}$$

տեսքի թվազույգերից, որտեղ c–ն ցանկացած իրական թիվ է: Հետևաբար, (1) հավասարումը կունենա անվերջ շատ լուծումներ:

Ենթադրենք, թե (1) հավասարության մեջ x–ը հաստատուն է, իսկ a–ն՝ փոփոխական: Այդ դեպքում այն կդառնա մեկ՝ a փոփոխականով հավասարում, որի արմատը

$$a=\frac{x^2+1}{2}$$

թիվն է: Նշանակում է՝ x–ի ամեն մի սևեռված արժեքի դեպքում (1) հավասարումն ունի միակ արմատ:

Այժմ (1) հավասարությունն ընդունենք որպես x փոփոխականով հավասարում (a–ն համարելով հաստատուն): Այդ դեպքում հավասարումը կունենա արմատ այն և միայն այն դեպքում, երբ $2a-1 \geq 0$, այսինքն՝ $a \geq \frac{1}{2}$: Այդ պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր a–ի դեպքում

$$x=\pm\sqrt{2a-1},$$

ընդ որում $a=\frac{1}{2}$ դեպքում կունենանք մեկ արմատ՝ $x=0$, իսկ $a>\frac{1}{2}$ դեպքում՝ երկու արմատ՝ $x_1=-\sqrt{2a-1}$, $x_2=\sqrt{2a-1}$: Ակնհայտ է, որ $a<\frac{1}{2}$ դեպքում հավասարումն արմատ չունի:

Դիցուք, տրված է x և a փոփոխականներ պարունակող

$$F(x,a)=G(x,a) \tag{2}$$

հավասարությունը: a փոփոխականի յուրաքանչյուր սևեռված (ֆիքսված) արժեքի դեպքում (2) հավասարությունը կարելի է դիտարկել որպես հավասարում x փոփոխականի (անհայտի) նկատմամբ և ընդհակառակը, x-ի յուրաքանչյուր սևեռված արժեքի դեպքում այն կարելի է դիտարկել իբրև հավասարում a փոփոխականի նկատմամբ: Ընդհանրապես, (2) հավասարությունը կարելի է դիտարկել նաև որպես երկու՝ x և a փոփոխականներով հավասարում:

Եթե պահանջվում է թվային որևէ A բազմության յուրաքանչյուր a տարրի համար լուծել x փոփոխականի նկատմամբ (2) հավասարումը, ապա այդ հավասարումն անվանում են մեկ՝ x փոփոխականով «անհայտով» և մեկ՝ a ***պարամետրով*** հավասարում: A բազմությունը կոչվում է պարամետրի ***փոփոխման տիրույթ***:

Անհայտի ընտրությունը պայմանական է: Պայմանավորվենք, սույն պարագրաֆում (և հետագայում) դիտարկվող (2) տեսքի հավասարումներն ընդունել որպես x փոփոխականով և a պարամետրով հավասարումներ (անհայտները կամ փոփոխականները սովորաբար նշանակում են $x, y, z, \ldots$ տառերով, իսկ պարամետրերը՝ $a, b, c, \ldots$ տառերով):

(2) հավասարումը, ըստ էության, հավասարումների մի ամբողջ բազմության (կամ՝ դասի) հակիրճ գրառումն է, որոնցից յուրաքանչյուրը ստացվում է (2) հավասարումից՝ a-ի կոնկրետ արժեքի դեպքում:

Պայմանավորվենք, այսուհետև, ամենուրեք ***պարամետրի փոփոխման տիրույթ*** ասելով հասկանալ բոլոր իրական թվերի բազմությունը (եթե, իհարկե, չկան հատուկ վերապահումներ):

Լուծել (2) հավասարումը, նշանակում է՝ այն լուծել a պարամետրի բոլոր արժեքների դեպքում:

Եթե (2) հավասարումը a պարամետրի թեկուզ մեկ արժեքի դեպքում չի քննարկվում, ապա այդ հավասարման լուծումն ավարտված չի համարվում:

Երկու և ավելի պարամետրերով և մեկ՝ x փոփոխականով հավասարումների հասկացությունները ներմուծվում են նույն ձևով: Օրինակ, մեկ՝ x փոփոխականով և երկու՝ a և b պարամետրերով հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝

$$F(x,a,b)=G(x,a,b):$$

Համանման ձևով ներմուծվում են նաև պարամետր պարունակող անհավասարումների ($F(x,a)>G(x,a)$, $F(x,a,b)>G(x,a,b)$ և այլն) հասկացությունները: Այստեղ ևս ընդունվում է, որ պարամետրի (պարամետրերի) փոփոխման տիրույթը իրական թվերի բազմությունն է:

Քանի որ պարամետր պարունակող հավասարումն (անհավասարումը) իրենից ներկայացնում է անվերջ շատ հավասարումների (անհավասարումների) համախումբ, ուստի պարզ է, որ անհնար է առանձնացնել նրանցից յուրաքանչյուրը: Լուծման ընթացքում համարում են, որ պարամետրերը հայտնի մեծություններ են: Որոշ դեպքերում անհրաժեշտություն է առաջանում՝ պարամետրերի համար առանձնացնել այնպիսի «առանձնահատուկ» արժեքներ, որոնցով պարամետրի (պարամետրերի) փոփոխման տիրույթը տրոհվում է այնպիսի միջակայքերի, որոնցով ավելի հստակ է դառնում քննարկվող առաջադրանքի լուծումը:

Օրինակ 1: Լուծենք $ax^2-(1-2a)x+a-2=0$ հավասարումը:

Լուծում: Երբ $a=0$, ապա կունենանք առաջին աստիճանի հավասարում՝ $-x-2=0$, որտեղից՝ $x=-2$:

Երբ $a\neq 0$, ապա տրված հավասարումը դառնում է քառակուսային հավասարում և ամեն մի այդպիսի a–ի դեպքում նրա արմատները կլինեն՝

$$x=\frac{1-2a-\sqrt{4a+1}}{2a}, \quad x=\frac{1-2a+\sqrt{4a+1}}{2a},$$

պայմանով, որ $4a+1\geq 0$, այսինքն՝ $a\geq -\frac{1}{4}$ (իհարկե, $a\neq 0$):

Այսպիսով, կարող ենք գրել ***պատասխանը***՝ լուծում չունի, երբ $a<-\frac{1}{4}$, –2, երբ $a=0$, $\frac{1-2a\pm\sqrt{4a+1}}{2a}$, երբ $a\geq -\frac{1}{4}$ և $a\neq 0$:

Օրինակ 2: m–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x^2-mx>\frac{2}{m}$ անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած x–ի դեպքում:

Լուծում: Ունենք՝ $x^2-mx>\frac{2}{m}\Leftrightarrow x^2-mx-\frac{2}{m}>0$:

Հայտնի է, որ $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq 0)$ անհավասարությունը տեղի ունի ցանկացած x–ի համար այն և միայն այն դեպքում, երբ $a>0$ և $D<0$ $(D=b^2-4ac)$: Հետևաբար, մեր օրինակի դեպքում պետք է պա–

հանջենք, որ վերջին անհավասարման ձախ մասի եռանդամի տարբե-րիչը փոքր լինի զրոյից, այսինքն՝

$$m^2+\frac{8}{m}<0 \Leftrightarrow \frac{m^3+8}{m}<0 \Leftrightarrow \frac{m+2}{m}<0:$$

Ստացված անհավասարումը լուծելով միջակայքերի մեթոդով, կստա-նանք՝ $m\in(-2;0)$:

Օրինակ 3: Գտնենք a–ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$x^4-8x^2+a=0$$

հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ:

Լուծում: Նշանակենք՝ $x^2=y$ $(y\geq 0)$: Կունենանք y–ի նկատմամբ քա-ռակուսային հավասարում.

$$y^2-8y+a=0:$$

Խնդրի պահանջն իրագործելու համար բավական է պահանջել, որ ստացված քառակուսային հավասարումն ունենա՝

ա) ճիշտ մեկ արմատ և այն էլ՝ դրական,

բ) երկու արմատ, որոնցից մեկը լինի դրական, մյուսը՝ բացասական:

Առաջին դեպքին բավարարում է միայն $a=16$ արժեքը, իսկ երկրորդ դեպքին՝ $a<0$ պայմանը (հիշենք, որ արմատների առկայության դեպքում $y_1\cdot y_2=a$): Երկրորդն անհրաժեշտ և բավարար պայման է, որպեսզի տարբերիչը լինի դրական և արմատներից մեկը դառնա դրական, մյուսը՝ բացասական:

Պատասխան՝ $a\in(-\infty;0)\cup\{16\}$:

Օրինակ 4: a–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$(a-1)x^2+2ax+3a-2>0$$

անհավասարությանը կբավարարի $(-1;\infty)$ միջակայքի ցանկացած x թիվ:

Լուծում: Երբ $a=1$, կունենանք՝ $x>-\frac{1}{2}$, որը $(-1;\infty)$ միջակայքի ոչ բոլոր թվերի համար է ճիշտ: Նշանակում է՝ $a=1$–ը չի բավարարում խնդրի պայմաններին:

Հասկանալի է, որ $a<1$ դեպքում տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը կամ դատարկ է, կամ $(x_1;\ x_2)$ տեսքի միջակայք, որտեղ x_1–ը և x_2–ը այդ անհավասարման ձախ մասի եռանդամի արմատներն են $(x_1<x_2)$: Նշանակում է՝ այդպիսի a–երից և ոչ մեկը չի բավարարում խնդրի պահանջին:

$a>1$ դեպքում $f(x)=(a-1)x^2+2ax+3a-2$ պարաբոլի գագաթի $-\dfrac{a}{a-1}$ աբսցիսը փոքր է –1-ից (հիմնավորեք): Քանի որ այդ դեպքում f ֆունկ-ցիան $\left[-\dfrac{a}{a-1};\ \infty\right)$ միջակայքում աճող է, ուստի բավական է պահանջել, որ $f(-1)$-ը լինի ոչբացասական: Լուծելով՝

$$\begin{cases} a>1, \\ f(-1)\ge 0 \end{cases}$$

համակարգը, կունենանք խնդրի պատասխանը՝ $a\in\left[\dfrac{3}{2};\ \infty\right)$:

Օրինակ 5: a-ի ինչ արժեքների դեպքում

$$(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$$

հավասարման արմատներից մեկը կլինի 3-ից մեծ, իսկ մյուսը՝ 2-ից փոքր:

Լուծում: Ամենից առաջ նկատենք, որ եթե $a=2$, ապա ստացվում է առաջին աստիճանի հավասարում, որն էլ չի կարող ունենալ երկու արմատ:

Դիցուք, $a>2$: Այդ դեպքում անհրաժեշտ է պահանջել, որ

$f(x)=(a-2)x^2-2(a+3)x+4a$ եռանդամն ունենա արմատներ, ընդ որում 2 և 3 թվերն ընկած լինեն այդ արմատների միջև: Քանի որ արմատների գոյության դեպքում նրանց միջև եղած բոլոր x-երի դեպքում $f(x)$-ն ընդունում է բացասական արժեքներ (պատկերավոր դառնալու համար բավական է մտաբերել, որ այդ դեպքում $f(x)$ եռանդամի գրաֆիկը դեպի վեր ճյուղերն ուղղված պարաբոլ է և Ox առանցքը հատում է երկու կետում): $f(2)<0$ և $f(3)<0$ պայմանները միաժամանակ ապահովում են նաև արմատների գոյությունը (ինչո՞ւ): Գտնենք այդ պայմաններին բավարարող բոլոր a-երը: Ունենք՝ $f(2)=4a-20$, $f(3)=7a-36$:

$4a-20<0$ և $7a-36<0$ պայմանները տեղի ունեն այն և միայն այն դեպքում, երբ $a<5$: Հաշվի առնելով սկզբնական $a>2$ պայմանը, կունենանք՝ $2<a<5$:

Այն դեպքում, երբ $a<2$, խնդրի պայմանները կիրականանան, եթե $f(2)$-ը և $f(3)$-ը միաժամանակ լինեն դրական (այս դեպքում եռանդամի արմատների միջև եղած բոլոր x-երի դեպքում $f(x)>0$): Սակայն $a<2$ դեպքում $f(2)<0$: Նշանակում է՝ այդպիսի a-երից և ոչ մեկը չի բավարարում խնդրի պայմաններին:

Պատասխան՝ $a\in(2;5)$:

Առաջադրանքներ

Առաջադրանքներում փոփոխականները (անհայտները) նշանակվում են x, y, z,..., իսկ պարամետրերը՝ a, b, c,...:

94. a–ի ինչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ.

ա) $2x^2+6x+a=0$: բ) $(a-1)x^2-2ax+4=0$:

95. a–ի ինչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ.

ա) $2x^2-12x+3a=0$: բ) $(2a^3-a)x^2-2ax-1=0$:

96. Ապացուցել, որ ցանկացած a թվի դեպքում հավասարումն ունի արմատ.

ա) $4x^2-4ax+2a-1=0$: բ) $(a-1)x^2-2ax+1=0$:

97. Պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում քառակուսային հավասարման x_1 և x_2 արմատները կբավարարեն նշված պայմանին.

ա) $x^2-8x+c=0;\quad 3x_1+x_2=29$: բ) $x^2+(a-1)x-2a=0;\quad x_1^2+x_2^2=9$:

98. Գտնել a–ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի չորս արմատ.

ա) $x^4-13x^2+a=0$, բ) $x^4-ax^2+a-1=0$:

99. a–ի ինչ արժեքների դեպքում $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$ հավասարման արմատներից մեկը մեծ է 1–ից, մյուսը՝ փոքր 1–ից:

100. a–ի ինչ արժեքների դեպքում $x^2+(3a+1)x+7a=0$ հավասարումն ունի երկու արմատ, երկուսն էլ մեծ՝ –2–ից:

101. b–ի ինչ արժեքների դեպքում $x^2+(3b+12)x+10a+40=0$ հավասարումն ունի երկու արմատ, երկուսն էլ՝ փոքր –5–ից:

102. m–ի ինչ արժեքների դեպքում են $4x^2-(3m+1)x-m-2=0$ հավասարման արմատները գտնվում $(-1;2)$ միջակայքում:

103. a–ի ինչ արժեքների դեպքում է անհավասարությունը բավարարվում ամբողջ թվային ուղղի վրա.

ա) $x^2-(8a-2)x+15a^2-2a-7>0$: բ) $(a-1)x^2-2(a-1)x+1>0$:

գ) $ax^2+2(a+2)x+2a+4<0$: դ) $\dfrac{ax^2+3x+4}{x^2+2x+2}<5$:

104. a–ի և b–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $|2x-a| \le b+1$ անհավասարման լուծումների բազմությունը $[3;4]$ հատվածն է:

105. a–ի և b–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $|x+3a| > 5-2b$ անհավասարման լուծումների բազմությունը $(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$–ն է:

106. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $[0;6]$ հատվածի յուրաքանչյուր թիվ $|x-3a^2+2a| \le 5$ անհավասարման լուծում է:

107. a–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում ունի.

ա) $\begin{cases}(4-x)(1+x) > 0,\\ 2x-a \le 3:\end{cases}$ բ) $\begin{cases}x^2-(3a+1)x+2a^2+2a < 0,\\ x+a^2 = 0:\end{cases}$

108. a–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգն ունի միակ մասնակի լուծում.

ա) $\begin{cases}5a-6x \ge 2,\\ 5a+3x \ge 3:\end{cases}$ բ) $\begin{cases}x^2+2x \le 35,\\ x^2-a(a+2)x+(2a-1)(a^2+1) \ge 0:\end{cases}$

109. a–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում չունի.

ա) $\begin{cases}(4+x)(3-2x) \ge 0,\\ 6a-3(x+1) > 2:\end{cases}$ բ) $\begin{cases}x^2-(3a-2)x+2a^2-2a \ge 0,\\ ax = 1:\end{cases}$

110. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $ax^2+4x > 1-3a$ անհավասարումը ճիշտ է x փոփոխականի բոլոր դրական արժեքների դեպքում:

111. Ապացուցել, որ ցանկացած a, b և c թվերի դեպքում հավասարումն արմատ ունի.

ա) $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) = 0$:

բ) $a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-b)(x-a) = 0$:

112. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում հետևյալ հավասարումներից գոնե մեկն արմատ ունի.

$(a+3)x^2+(4a+1)x+4a-1 = 0;$ $(a+1)x^2-(2a-3)x+a-7 = 0$:

113. a–ի ի՞նչ արժեքների դեպքում անհավասարությանը կբավարարի նշված բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր թիվ.

ա) $2x-a^2+5 < 0,\quad x\in[-2;2]$: բ) $x^2+ax+a^2+6a < 0,\quad x\in(1;2)$:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

15. Ունենք՝ $|a+1|+|a-3|\ge 4 \Leftrightarrow |a+1|+|3-a|\ge 4$:

Օգտվելով $|p|+|q|\ge|p+q|$ հայտնի անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝ $|a+1|+|3-a|\ge|(a+1)+(a-3)|=4$:

17. Ակնհայտ է, որ ցանկացած p և q թվերի համար՝ $(p-q)^2\ge 0$: Բացելով փակագծերը, կստանանք $p^2+q^2\ge 2pq$ հայտնի անհավասարությունը: Օգտվելով այդ անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$a^4+b^4\ge 2a^2b^2,\qquad c^4+d^4\ge 2c^2d^2:$$

Գումարելով այդ անհավասարությունները, կստանանք՝

$$a^4+b^4+c^4+d^4\ge 2(a^2b^2+c^2d^2): \tag{1}$$

Մյուս կողմից, դարձյալ նույն անհավասարության շնորհիվ կունենանք՝

$$2(a^2b^2+c^2d^2)\ge 4abcd: \tag{2}$$

(1) և (2) անհավասարություններից, փոխանցական հատկության շնորհիվ, կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4abcd:$$

Ապացուցման ընթացքի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ այդ անհավասարության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն դեպքում, երբ $a=b=c=d$:

18. Օգտվելով $\dfrac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\quad(x>0,\quad y>0)$ հայտնի անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge 2c,\quad \frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\ge 2b,\quad \frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge 2a:$$

Գումարելով ստացված ճիշտ անհավասարությունները, կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c:$$

Հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=c$:

24. Ունենք՝

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}>$$

$$>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}:$$

26. Օգտվելով $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ նույնությունից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{(n+1)n}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1:$$

27. Ակնհայտ է, որ $k>1$ դեպքում $\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k\cdot k}<\frac{1}{(k-1)k}$: Կիրառելով այս անհավասարությունը ապացուցվելիք անհավասարության ձախ մասի բոլոր գումարելիների վրա, կունենանք՝

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}<1:$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք նաև $\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ նույնությունից, ընդունելով՝ $k=2,3,\ldots,n$:

29. ա) Ո՛չ, բ) այո՛: **30.** ա) Ո՛չ, բ) այո՛: **31.** ա) Այո՛, բ) այո՛: **32.** ա) Այո՛, բ) այո՛: **34.** ա) Ո՛չ, բ) ո՛չ: **35.** ա) Ո՛չ, բ) այո՛: **36.** ա) Ո՛չ, բ) այո՛: **37.** ա) Ո՛չ, բ) ո՛չ: **38.** ա) Այո՛, բ) այո՛: **40.** ա) $(-\infty;-5]\cup\{2\}\cup[4,5;\infty)$: **41.** բ) $\left[2;\frac{5}{2}\right]\cup\{2\}$:

43. բ) $(-\infty;-6]\cup[-2;\infty)$: **44.** բ) $\{-1;1\}$: **45.** բ) $(-\infty;-5)\cup(-3;-1)\cup(1;3)\cup(5;\infty)$

46. ա) $\left[-3;\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right]\cup\left[0;\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right]\cup\{3\}$, բ) $(-1;0)\cup(1;4)$:

47. ա) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{3};\infty\right)$, բ) $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$: **48.** ա) $(-8;-1)$, բ) $[-2;2]$:

49. ա) $\left(\frac{1-\sqrt{73}}{6};-1\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{73}}{6}\right)$, բ) $(-3;-2)\cup(-1;1)$:

51. ա) $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup[2;\infty)$, բ) $\left[\frac{3}{5};3\right]$: **53.** ա) $(-\infty;1]\cup\left[\frac{3}{2};\infty\right)$, բ) $(4,5;\infty)$:

54. ա) $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, բ) $(-\infty;-1)\cup(4;\infty)$: **55.** ա) $[-1;1]$, բ) $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$: **56.** բ) $(-\infty;-2]\cup[-1;\infty)$: **57.** ա) $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(3;\infty)$, բ) $(-\infty;\infty)$:

58. ա) $\left(-\infty; \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\cup\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}; \infty\right)$, բ) $(-\infty; -7]\cup[-1; \infty)$: **59.** ա) $(-\infty; \infty)$:
60. ա) $(-\infty; -1]\cup[11; \infty)$, բ) $(0; \infty)$: **61.** ա) $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, բ) $(-\infty; -2]\cup\left[\frac{5}{3}; \infty\right)$:
62. $(-\infty; -1]\cup\{0; 1\}$: ***Ցուցում:*** Օգտվել այն փաստից, որ $|a|+|b|\le|a+b|$ անհավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ $ab\ge 0$: Այդ նկատառումով կունենանք տրվածին համարժեք $(x^9-x)(x^7-x^8)\ge 0$ անհավասարումը: **67.** $[3; 7)$: **68.** $[0; 1]$: **69.** $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$:**70.** $\varnothing$: **72.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{17}{25}; \infty\right)$: **73.** $(-\infty; 3]$: **74.** $(3; \infty)$: **75.** $[4; 8)$:

76. $[-4{,}5; 0)$: **77.** $(-\infty; 0]\cup(4{,}5; \infty)$: **78.** $[-1; 5]$: **79.** $(-3; 5]$: **80.** $[1; 5)\cup(5; 9]$:
81. $\left[4; 4\frac{9}{16}\right]$: **82.** $[3; \infty)$: **83.** $[4; 5)$: **84.** $\{2\}\cup[3; 5]$: **85.** $\{-1\}\cup[2; \infty)$:
86. $(-2; 2)$: **87.** $(-2; -1]\cup[5{,}5; \infty)$: **88.** $(-\sqrt{3}; 0)$: **89.** $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{14}\right]$: **90.** 11: **91.** $-3\frac{1}{4}$: **92.** $-4{,}8$: **94.** ա) $a\in(-\infty; 4{,}5)$, բ) $a\in(-\infty; 1)\cup(1; 2)\cup(2; \infty)$: **95.** ա) 6, բ) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; \frac{1}{2}$: **97.** ա) $c=26, 25$, բ) $a=2$: **98.** ա) $a\in\left(0; 42\frac{1}{4}\right)$,
բ) $a\in(1; 2)\cup(2; \infty)$: **99.** $a\in\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$: **100.** $a\in\left(-2; \frac{11-4\sqrt{7}}{9}\right]$:
101. $b\in\left(\frac{4}{9}; 1\right)$: **102.** $c\in\left(-\frac{3}{2}; \frac{12}{7}\right)$: **103.** ա) $p\in(2; 4)$, բ) $p\in\ge(1; 2)$,
գ) $p\in(-\infty; -2)$, դ) $p\in\left(-\infty; \frac{71}{24}\right)$: **104.** $a=7,\ b=0$: **105.** $a=\frac{1}{6},\ b=\frac{9}{4}$:
106. $a\in\left[-1; -\frac{1}{3}\right]\cup\left[1; \frac{5}{3}\right]$: **107.** ա) $a\in(-5; \infty)$, բ) $a\in(-2; 0)$: **108.** ա) $a=\frac{8}{15}$,
բ) $a=-3$: **109.** ա) $a\in\left(-\infty; -\frac{7}{6}\right]$, բ) $a\in\left(-1; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\{0\}\cup\left(1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$:
110. $a\in\left[\frac{1}{3}; \infty\right)$: **113.** ա) $a\in(-\infty; -3)\cup(3; \infty)$, բ) $a\in\left[\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}; 2\sqrt{3}-4\right]$: