ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ 1. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐԺԵՔՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Մեկ փոփոխականով հավասարման հասկացությունը: Հավասարումների համարժեքությունը

Միջին դպրոցում դուք լուծել եք տարբեր հավասարումներ (գծային, քառակուսային, երկքառակուսի (բիկվադրատ)): Յուրաքանչյուր տեսքի դեպքում տրվել է համապատասխան սահմանում: Այժմ տանք մեկ փոփոխականով հավասարման ընդհանուր սահմանումը և քննարկենք տեսական որոշ հարցեր, որոնք առնչվում են այդ հասկացությանը:

Սահմանում: $A(x)=B(x)$ տեսքի հավասարությունը, որտեղ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը x փոփոխականով արտահայտություններ են, կոչվում է ***մեկ՝ x փոփոխականով հավասարում***:

Մեկ փոփոխականով հավասարման ***արմատ*** կոչվում է փոփոխականի այն արժեքը, որը հավասարման մեջ տեղադրելիս ստացվում է թվային ճիշտ հավասարություն:

Եթե $A(x)=B(x)$ հավասարման արմատները $c_1, c_2, \dots, c_n$ թվերն են, ապա պատասխանը գրառում են. կամ $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ բազմության տեսքով, կամ՝ $x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ \dots,\ x_n=c_n$ տեսքով:

Այն դեպքում, երբ հավասարումը չունի արմատ, ապա գրում են. «Հավասարումն արմատ չունի» կամ՝ «$\varnothing$» (դատարկ բազմության նշանը):

Հավասարումը լուծել նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր արմատների բազմությունը կամ ապացուցել, որ այն արմատ չունի:

$A(x)=B(x)$ հավասարման ***թույլատրելի արժեքների բազմություն (ԹԱԲ)*** է կոչվում x փոփոխականի բոլոր այն արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում որոշված են (իմաստ ունեն) և՛ $A(x)$-ը և՛ $B(x)$-ը: Հականալի է, որ այդ հավասարման ԹԱԲ-ը $A(x)$ և $B(x)$ արտահայտությունների ԹԱԲ-երի հատումն է:

Օրինակ, $\dfrac{x}{4-\sqrt{x}}+2=\sqrt{18-x}$ հավասարման ԹԱԲ-ը (նշանակենք այն X-ով) որոշվում է հետևյալ պայմաններով՝

$4-\sqrt{x}\neq 0,\ x\geq 0$ և $18-x\geq 0$, այսինքն՝ $X=[0;16)\cup(16;18]$:

Միևնույն փոփոխականով երկու հավասարումներ կոչվում են ***համարժեք հավասարումներ***, եթե նրանց արմատների բազմությունները համընկնում են (այլ կերպ ասած՝ եթե նրանք ունեն միևնույն արմատները): Մասնավորաբար, արմատներ չունեցող երկու հավասարումներ ևս համարժեք են:

Լուծումը կարճ գրառելու համար «համարժեք է» բառի փոխարեն հաճախ դնում են $\Leftrightarrow$ պայմանանշանը, այսինքն՝ այն փաստը, որ $A(x)=B(x)$ և $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարումները համարժեք են, գրառվում է այսպես՝

$$A(x)=B(x)\Leftrightarrow A_1(x)=B_1(x):$$

Դիցուք՝ որոշ ձևափոխություններից հետո $A(x)=B(x)$ հավասարումից ստացվել է $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարումը: Եթե $A(x)=B(x)$ հավասարման յուրաքանչյուր արմատ միաժամանակ արմատ է նաև $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարման համար, ապա ասում են, որ $A(x)=B(x)$ հավասարումից ***հետևում է*** $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարումը: Այդ դեպքում վերջին հավասարումն անվանում են $A(x)=B(x)$ հավասարման ***հետևանք***: Այդ փաստը գրառվում է այսպես՝

$$A(x)=B(x)\Rightarrow A_1(x)=B_1(x)$$

($\Rightarrow$ նշանի տակ կարդալ՝ «հետևում է»):

Օրինակ, $x^2-4x+5=0$ հավասարումը $\dfrac{x^2-4x+5}{x-1}=0$ հավասարման հետևանքն է, այսինքն՝ $\dfrac{x^2-4x+5}{x-1}=0\Rightarrow x^2-4x+5=0$:

Եթե երկու հավասարումներից յուրաքանչյուրը մյուսի հետևանքն է, ապա պարզ է, որ այդ հավասարումները համարժեք են:

Երբեմն միևնույն հավասարման լուծումը հանգում է երկու և ավելի հավասարումների լուծմանը: Դիտարկենք

$$(3x-5)(x^2-7x+6)=0 \tag{1}$$

հավասարումը: Հայտնի է, որ արտադրյալը կարող է հավասարվել զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա բազմապատկիչներից գոնե մեկը հավասար է 0–ի (պայմանով, որ մյուս բազմապատկիչներն իմաստ ունենան): Հետևաբար, (1) հավասարումը լուծելիս անհրաժեշտ է լուծել $3x-5=0$ և $x^2-7x+6=0$ հավասարումները, այնուհետև միավորել դրանց արմատները: Առաջին հավասարման միակ արմատը $\frac{5}{3}$–ն է, իսկ երկրորդ հավասարումն ունի երկու արմատ՝ 1 և 6: Միավորելով այդ թվերը, կստանանք (1) հավասարման արմատների բազմությունը՝ $\left\{1;\frac{5}{3};6\right\}$:

Նման դեպքում ասում են, որ (1) հավասարումը համարժեք է $3x-5=0$ և $x^2-7x+6=0$ հավասարումների համախմբին, և գրառում են այսպես՝

$$(3x-5)(x^2-7x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-5=0; \\ x^2-7x+6=0: \end{array}\right.$$

Ընդունված է նաև գրառել այսպես՝

$$(3x-5)(x^2-7x+6)=0 \Leftrightarrow (3x-5=0;\ \ x^2-7x+6=0):$$

Ասում են, որ մեկ փոփոխականով մի քանի հավասարումներ կազմում են ***համախումբ***, եթե պահանջվում է գտնել փոփոխականի բոլոր այն արժեքների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է տրված հավասարումներից ***գոնե մեկին***[1)]:

Այն փաստը, որ $A(x)=B(x)$ և $C(x)=D(x)$ հավասարումները կազմում են համախումբ, գրառվում է այսպես՝

$$\left[\begin{array}{l} A(x)=B(x), \\ C(x)=D(x) \end{array}\right.$$ կամ՝ «,» նշանի օգնությամբ՝ $A(x)=B(x)$, $C(x)=D(x)$:

Հավասարումների համախմբի լուծումների բազմությունը, ըստ էության, այդ համախումբը կազմող հավասարումների արմատների բազմությունների միավորումն է: Նշենք, որ համախմբի վերը նշված պայմանանշանները փոխարինում են «կամ» բառին:

Դիցուք՝ ինչ–որ ձևափոխություններից հետո $A(x)=B(x)$ հավասարումը բերվում է այնպիսի $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարման (կամ՝ հավասարումների համախմբի), որի որոշ արմատներ արդեն տրված հավասարման արմատներ չեն: $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարման այդպիսի արմատներն անվանում են $A(x)=B(x)$ հավասարման ***կողմնակի*** արմատներ:

Նկատենք, որ տրված հավասարման հետևանք–հավասարումը կամ

[1)] Ընդհանուր սահմանումը հետևյալն է. մի քանի առաջադրությունների համախմբություն կոչվում է «նշված առաջադրություններից գոնե մեկը սորուգ է» առաջադրությունը:

համարժեք է տրվածին, կամ ունի նաև կողմնակի արմատներ (տրված հավասարման համար)։

Օրինակ, $\sqrt{3x+1}=x-1$ հավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձ-րացնելով՝ կունենանք $3x+1=x^2-2x+1$ հավասարումը, որի $x_1=0$ և $x_2=5$ արմատներից առաջինը տրված հավասարման արմատ չէ, այսինքն՝ $x=0$ -ն $\sqrt{3x+1}=x-1$ հավասարման կողմնակի արմատ է։

Հարցեր

1. Ձևակերպել մեկ փոփոխականով հավասարման հասկացության սահմանումը։
2. Ձևակերպել մեկ փոփոխականով հավասարման արմատի հասկա-ցության սահմանումը։
3. Ձևակերպել հավասարումների համարժեքության հասկացության սահմանումը։

Առաջադրանքներ

1. Տրված՝ $0; -1; \frac{1}{2}; 0{,}125; \sqrt{5}; 4-\sqrt{3}$ թվերից նշել այն թվերը, որոնք տրված հավասարման արմատներ են.

ա) $x^3=5x$ բ) $(8x-1)(16x^4-1)=0$ գ) $x^2+13=8x$ ։

2. Նշել հավասարման որևէ արմատ.

ա) $x^3+x=10$, բ) $x^4+\frac{1}{x}=2$,

գ) $x^5+x^3+x=-3$, դ) $(x+1)(x+2)(x+3)=6$,

ե) $\sqrt[3]{x+7}=23-x$, զ) $\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+4}=2$ ։

3. Ապացուցել, որ հավասարումն արմատ չունի.

ա) $2x^4+3x^2+1=0$, բ) $\frac{1}{x^6+2}=x^4+x^2+1$,

գ) $\sqrt{x-6}=2\sqrt{5-x}-3x$, դ) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4x-3}=-1$,

ե) $\sqrt{x^2+5}=2-x^2$, զ) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=x-5$ ։

4. Գտնել հավասարման թույլատրելի արժեքների բազմությունը (ԹԱԲ-ը).

ա) $x^3+3x(x-1)=x^4+2$, բ) $\frac{4}{2x-1}-\frac{x}{x+3}=\frac{1}{4x^2-1}$,

գ) $\frac{3x}{x^2-4}+x=\frac{1}{x^3+x^2}$, դ) $x^2-\frac{1}{2|x|-5}=x^{-1}+\frac{2}{|x|+6}$:

2. Թեորեմներ հավասարումների համարժեքության վերաբերյալ

Եթե ինչ-որ ձևափոխություններից հետո $A(x)=B(x)$ հավասարումը բերվում է այնպիսի $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարման (կամ՝ հավասարումների համախմբի), որ $A(x)=B(x)$ հավասարման որոշ արմատներ արդեն արմատներ չեն $A_1(x)=B_1(x)$ հավասարման համար, այդ դեպքում ասում են, որ տեղի է ունեցել արմատների ***կորուստ***:

Օրինակ, $(x+2)(2x-7)=(x+2)(x-3)$ հավասարումն ունի երկու արմատ՝ $x_1=-2$, $x_2=4$:

Եթե այդ հավասարման երկու մասերը բաժանենք («կրճատենք») $(x+2)$-ի, ապա կստանանք $2x-7=x-3$ հավասարումը, որն ունի մեկ արմատ՝ $x=4$: Այդպիսի ձևափոխության արդյունքում $x=-2$ արմատն «անհետացել» է: Այդ տեղի ունեցավ այն պատճառով, որ հավասարման երկու մասերը բաժանել ենք փոփոխական պարունակող այնպիսի մեծության վրա, որը կարող է հավասարվել զրոյի:

Արմատների կորուստից խուսափելու համար անհրաժեշտ է լուծման ընթացքում հետևել այն բանին, որ համապատասխան քայլերը հանգեցնեն կա՛մ համարժեք հավասարման, կա՛մ՝ հետևանք-հավասարման:

Հավասարումները լուծելիս, սովորաբար, կատարվում են տարբեր ձևափոխություններ, որոնց արդյունքում տրված հավասարումը հանգեցվում է ավելի պարզ հավասարման (կամ՝ հավասարումների համախմբի): Այդ առումով կարևոր է իմանալ, թե որ ձևափոխություններն են, որ տրված հավասարումը բերում են իրեն համարժեք հավասարման, որոնք՝ հետևանք-հավասարման (որտեղ կարող են առաջանալ կողմնակի արմատներ) և որոնք են, որ հանգեցնում են արմատների կորուստի:

Մեկ փոփոխականով հավասարումները լուծելիս օգտվում են ստորև ձևակերպված հիմնական կանոններից ու հնարներից:

Թեորեմ 1: ***Եթե*** $A(x)=B(x)$ ***հավասարման երկու մասերին ավելացնենք միևնույն*** $C(x)$ ***արտահայտությունը, որն իմաստ ունի*** $A(x)=B(x)$ ***հավասարման ԹԱԲ-ի բոլոր*** x***-երի դեպքում, ապա կստացվի տրվածին համարժեք հավասարում, այսինքն՝***

$$A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)+C(x)=B(x)+C(x):$$

Ապացուցում: Դիցուք՝ $x=d$ –ն $A(x)=B(x)$ հավասարման արմատ է: Այդ նշանակում է, որ ճիշտ է $A(d)=B(d)$ թվային հավասարությունը: Թվային հավասարությունների հատկության համաձայն՝ ճիշտ կլինի նաև

$$A(d)+C(d)=B(d)+C(d) \tag{2}$$

թվային հավասարությունը, որն էլ ցույց է տալիս, որ $x=d$ թիվը $A(x)+C(x)=B(x)+C(x)$ արմատ է:

Այժմ, ենթադրենք, թե $x=d$ –ն $A(x)+C(x)=B(x)+C(x)$ հավասարման արմատ է: Այդ դեպքում ճիշտ կլինի թվային (2) հավասարությունը: Հետևաբար, ճիշտ կլինի նաև $A(d)=B(d)$ հավասարությունը: Իսկ դա նշանակում է, որ $x=d$ –ն նաև $A(x)=B(x)$ հավասարման արմատ է: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: ***Յանկացած գումարելի կարելի է հավասարման մի մասից տեղափոխել մյուս մասը (հակադիր նշանով), որից հետո ստացվում է տրվածին համարժեք հավասարում:***

Իրոք, եթե $A(x)+C(x)=B(x)$ հավասարման երկու մասերին ավելացնենք $-C(x)$ արտահայտությունը, ապա, ըստ թեորեմ 1–ի, կստացվի համարժեք հավասարում, այսինքն՝

$$A(x)+C(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)=B(x)-C(x):$$

Այդ փաստը հաճախ է գործածվում հավասարումներ լուծելիս:

Թեորեմ 2: ***Եթե $A(x)=B(x)$ հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) այդ հավասարման ԹԱԲ–ի բոլոր x–երի դեպքում իմաստ ունեցող և այդ բազմության ոչ մի x–ի դեպքում զրոյին չհավասարվող $C(x)$ արտահայտությամբ, ապա կստացվի տրվածին համարժեք հավասարում.***

$$A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\cdot C(x)=B(x)\cdot C(x)$$
$$\left(A(x)=B(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{C(x)}=\frac{B(x)}{C(x)}\right):$$

Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն:

Հետևանք: ***Եթե հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) զրոյից տարբեր միևնույն թվով, կստացվի տրվածին համարժեք հավասարում:***

Օրինակ 1: Եթե $1+\dfrac{4x}{x^2+4}=\dfrac{5-3x}{x^2+4}$ հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք $\varphi(x)=x^2+4$ արտահայտությամբ, ապա կստանանք

$x^2+4+4x=5-3x$ հավասարումը, որը համարժեք է տրվածին (հիմնավորեք):

Օրինակ 2: Եթե $x^2-16=(2x+7)(x+4)$ հավասարման երկու մասերը բաժանենք $x+4$ արտահայտության վրա, ապա ստացված $x-4=2x+7$ հավասարումը համարժեք չէ տրվածին (ինչո՞ւ):

Նկատենք, որ վերոհիշյալ թեորեմներից յուրաքանչյուրում խոսքը միայն մեկ տեսակի ձևափոխության մասին է: Սակայն հավասարումները լուծելիս մենք առնչվում ենք նաև այլ ձևափոխությունների հետ: Հատկապես ուշադրության են արժանի նման անդամների միացումը և կոտորակների կրճատումը, որոնք բոլորովին այլ ձևափոխություններ են և հաճախ են հանդիպում հավասարումներ լուծելիս: Այդպիսի ձևափոխությունների հետևանքով կարող են ստացվել սկզբնականին ոչ համարժեք հավասարումներ:

Օրինակ 3: $x^2+\frac{1}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$ և $x^2=1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}$ հավասարումները համարժեք են (համաձայն 1-ին թեորեմի հետևանքի): Սակայն, եթե երկրորդ հավասարման աջ մասում կատարենք նման անդամների միացում (իրագործենք հանումը), կստանանք $x^2=1$ հավասարումը, որը համարժեք չէ սկզբնական հավասարումներին (վերջին հավասարման $x=-1$ արմատը տրված հավասարումների համար արմատ չէ): Այդ տեղի ունեցավ այն պատճառով, որ նման անդամների միացումից հետո հավասարման ԹԱԲ-ն ընդլայնվեց:

Օրինակ 4: $4(x^2-\sqrt{x})=1-4\sqrt{x}$ հավասարման մեջ կատարելով նման անդամների միացում, կստանանք՝ $4x^2-1=0$, որը համարժեք չէ տրվածին (բավական է ստուգել $x=-0{,}5$ արժեքը):

Օրինակ 5: $\frac{x^2-6x+8}{x-4}=3x^2-46$ հավասարման ձախ մասում գտնվող կոտորակը կրճատելով $(x-4)$-ով կստանանք $x-2=3x^2-46$ հավասարումը, որը համարժեք չէ տրվածին (համոզվեք դրանում):

Օրինակ 6: Եթե $\frac{x^2-25}{x-5}=6x$ հավասարման ձախ մասի կոտորակը կրճատենք $(x-5)$-ով, ապա կստանանք դրան համարժեք հավասարում՝ $x+5=6x$ (հիմնավորեք):

Բանն այն է, որ թե՛ նման անդամների միացման և թե՛ կոտորակների կրճատման դեպքում հնարավոր է, որ կատարվի տրված հավասարման ԹԱԲ-ի փոփոխություն (իրականում՝ ընդլայնում), որի հետևանքով էլ կարող են առաջանալ կողմնակի արմատներ:

Թեորեմ 3: ***Եթե*** $A(x)=B(x)$ ***հավասարման ԹԱԲ-ում նրա երկու մասերը ոչբացասական են, ապա***

$$A(x)=B(x)\Leftrightarrow (A(x))^n=(B(x))^n, \text{ որտեղ } n\in N:$$

Կենտ *n*-***երի դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը*** (առանց սահմանափակումների).

$$A(x)=B(x)\Leftrightarrow (A(x))^n=(B(x))^n:$$

Ապացուցում: Դիցուք՝ $x=c$-ն $A(x)=B(x)$ հավասարման արմատ է: Այդ դեպքում ճիշտ է $A(c)=B(c)$ թվային հավասարությունը: Նշանակենք՝

$$A(c)=a,\ B(c)=b:$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $a\geq 0$, $b\geq 0$, ուստի ցանկացած բնական n-ի դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝

$$a=b\Leftrightarrow a^n=b^n:$$

Հետևաբար՝ $A(c)=B(c)\Leftrightarrow (A(c))^n=(B(c))^n$: Իսկ դա նշանակում է, որ $x=c$-ն նաև $(A(x))^n=(B(x))^n$ հավասարման արմատ է: Այդ առնչության շնորհիվ կարելի է պնդել, որ եթե $x=c$-ն $(A(x))^n=(B(x))^n$ հավասարման արմատ է, ապա այն նաև $A(x)=B(x)$ հավասարման արմատ է:

Կենտ *n*-երի դեպքում, առանց սահմանափակումների, ունենք՝

$$a=b\Leftrightarrow a^n=b^n:$$

Այս պնդումից էլ բխում է թեորեմի երկրորդ մասի ապացուցումը:

Օրինակ 7: Եթե $\sqrt{x-4}=3x-5$ հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի, ապա կստանանք $x-4=(3x-5)^2$ հավասարումը, որը համարժեք է տրվածին, քանի որ ելակետային հավասարման ԹԱԲ-ում ($X=[4;\ \infty)$) նրա երկու մասերն էլ ոչբացասական են:

Օրինակ 8: Եթե $\sqrt{4+2x+x^2}=x-2$ հավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնենք, ապա կստանանք դրան ոչ համարժեք հավասարում՝ $4+2x+x^2=(x-2)^2$ (ստուգեք $x=0$ արժեքը): Բանն այն է, որ տրված հավասարման ԹԱԲ-ը R-ն է (ցանկացած x-ի դեպքում $4+2x+x^2=(x+1)^2+2>0$), որտեղ տրված հավասարման ձախ մասի արտահայտությունը՝ որպես թվաբանական արմատ, ոչբացասական է, մինչդեռ աջ մասը՝ $x-2$-ը կարող է ընդունել նաև բացասական արժեքներ:

Ընդհանրապես, եթե $A(x)=B(x)$ ***հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի, ապա կստանանք տրվածին հետևանք հավասարում,*** այսինքն՝

$$A(x)=B(x)\Rightarrow (A(x))^2=(B(x))^2 :$$

Ընդհանուր դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝

Ցանկացած $k\in N$ ***դեպքում*** $A(x)=B(x)\Rightarrow (A(x))^{2k}=(B(x))^{2k}$:

Դժվար չէ համոզվել, որ

$$(A(x))^2=(B(x))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=B(x), \\ A(x)=-B(x) \end{array}\right.$$

և, ***ընդհանրապես, ցանկացած*** $k\in N$ ***թվի դեպքում***

$$(A(x))^{2n}=(B(x))^{2k} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=B(x), \\ A(x)=-B(x): \end{array}\right.$$

Այս պարագրաֆում դիտարկված բոլոր հասկացությունները, փաստերն ու նկատառումները հիմնականում իրենց լայն կիրառությունները կունենան հետագայում՝ եռանկյունաչափական, իռացիոնալ, ցուցչային, լոգարիթմական և այլ հավասարումներ լուծելիս: Առայժմ (հաջորդ պարագրաֆում) կդիտարկենք միայն ռացիոնալ հավասարումներ:

Հարցեր

1. Ձևակերպել հավասարումների համարժեքության վերաբերյալ թեորեմները:
2. Ապացուցել թեորեմ 2-ը:

Առաջադրանքներ

5. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումների զույգերը.

ա) $x^3-x=0$ և $\dfrac{x^3-x}{x}=0$,

բ) $x^2-4x+\dfrac{1}{x-5}=x+\dfrac{1}{x-5}$ և $x^2-4x=x$,

գ) $\dfrac{3x}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}=2+\dfrac{1}{x+3}$ և $\dfrac{3x}{x-3}=2$,

դ) $\dfrac{2x^2+2x+3}{x+3}=\dfrac{3x^2+2x-6}{x+3}$ և $2x^2+2x+3=3x^2+2x-6$,

ե) $\dfrac{2x^2+2x+3}{x+2}=\dfrac{3x^2+2x-6}{x+2}$ և $2x^2+2x+3=3x^2+2x-6$,

զ) $2\sqrt{x}-7x^2=2x+2\sqrt{x}$ և $-7x^2=2x$, է) $\sqrt{x}+2=\sqrt{2x}$ և $\left(\sqrt{x}+2\right)^2=\left(\sqrt{2x}\right)^2$,

ը) $\sqrt{2x-5}=x+1$ և $2x-5=(x+1)^2$:

6. Համարժեք են, արդյոք, հավասարումը և հավասարումների համախումբը.

ա) $(x-2)\left(x+\dfrac{1}{x+5}\right)=0$ և $x-2=0$, $x+\dfrac{1}{x+5}=0$,

բ) $(x+5)\left(x+\dfrac{1}{x+5}\right)=0$ և $x+5=0$, $x+\dfrac{1}{x+5}=0$,

գ) $\dfrac{(x^2-7x+10)(x-8)}{x-5}=0$ և $x^2-7x+10=0$, $x-8=0$,

դ) $(0,5x-\sqrt{2})\left(1-\dfrac{1}{8-x^2}\right)=0$ և $0,5x-\sqrt{2}=0$, $1-\dfrac{1}{8-x^2}=0$,

ե) $\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+1}=0$ և $\sqrt{x-5}=0;$ $\sqrt{x+1}=0$,

զ) $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x+2}=0$ և $\sqrt{4-x}=0;$ $\sqrt{x+2}=0$:

§ 2. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

Սույն պարագրաֆում կդիտարկվեն $A(x)=B(x)$ տեսքի այնպիսի հավասարումներ, որտեղ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը ռացիոնալ արտահայտություններ են: Ընդունված է այդպիսի հավասարումներն անվանել ***ռացիոնալ հավասարումներ***:

Ռացիոնալ հավասարումների օրինակներ են.

$$4x-5=\frac{3x-1}{x+2},\qquad \frac{\sqrt{3}\,x-7}{x^2+1}=\frac{3}{4}x-\frac{5x-8}{2x-1},\qquad \frac{1}{x}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}=0:$$

1^0. Եթե $A(x)$-ը և $B(x)$-ը x փոփոխական պարունակող ռացիոնալ ամբողջ արտահայտություններ են, ապա $A(x)=B(x)$ հավասարումը կոչվում է ***ռացիոնալ ամբողջ*** (կամ պարզապես՝ ***ամբողջ***) հավասարում:

Այդպիսի հավասարումների օրինակներ են՝

$$4x^4-3x^2+1=x^3+0,5x, \qquad (2x-5)\left(x+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+5,$$

$$\frac{3-2x^2}{6}-x^3=8x+\frac{x(x+9)}{5}:$$

Ցանկացած ամբողջ հավասարում կարելի է ձևափոխել իրեն համարժեք $P(x)=0$ տեսքի հավասարման, որտեղ $P(x)$-ը ստանդարտ տեսքի բազմանդամ է: Այդ տեսքի ***հավասարման աստիճան*** է կոչվում $P(x)$ բազմանդամի աստիճանը:

Նշենք, որ ռացիոնալ ամբողջ հավասարումների լուծման ընթացքում կատարվող ձևափոխությունների արդյունքում ստացվում են միայն տրվածին համարժեք հավասարումներ: Դրա շնորհիվ էլ այդպիսի հավասարումներ լուծելիս գտած արմատները չեն ստուգվում և, բացի այդ, ամեն մի կոնկրետ դեպքում այդ մասին չի հիշատակվում:

2^0. Եթե $A(x)$ և $B(x)$ ռացիոնալ արտահայտություններից գոնե մեկը կոտորակային ռացիոնալ արտահայտություն է, ապա $A(x)=B(x)$ հավասարումը կարելի է բերել իրեն համարժեք

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \qquad (1)$$

տեսքի հավասարմանը, որտեղ $P(x)$-ը և $Q(x)$-ը ամբողջ արտահայտություններ են:

(1) հավասարումն անվանում են ***կոտորակային ռացիոնալ*** հավասարում: Պարզ է, որ (1) հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $P(x)=0$ և $Q(x)\neq 0$, այսինքն, ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0: \end{cases}$$

Այստեղից հետևում է, որ (1) հավասարումը լուծելու համար անհրաժեշտ է լուծել $P(x)=0$ հավասարումը, այնուհետև, վերջին հավասարման արմատների համար ստուգել $Q(x)\neq 0$ պայմանը (որով էլ կհայտնաբերվեն կողմնակի արմատները):

Ռացիոնալ հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդներն են.

1) բազմապատկիչների վերլուծում,

2) նոր (օժանդակ) փոփոխականի ներմուծում:

Բազմապատկիչների վերլուծման մեթոդի էությունը հետևյալն է: Դիցուք՝ անհրաժեշտ է լուծել $A(x)=0$ ռացիոնալ հավասարումը: Ենթադրենք՝ $A(x)$-ը ներկայացվում է x փոփոխականով ռացիոնալ արտահայ-տությունների արտադրյալի տեսքով՝

$$A(x)=A_1(x)A_2(x)\ldots A_n(x):$$

Այդ դեպքում տրված հավասարումը համարժեք է

$$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)=0 \qquad (2)$$

հավասարմանը:

Թեորեմ: ***(2) հավասարման յուրաքանչյուր արմատ***

$$A_1(x)=0;\quad A_2(x)=0;\ \ldots;\quad A_n(x)=0 \qquad (3)$$

հավասարումներից գոնե մեկի արմատ է, այսինքն՝

$$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)=0 \Rightarrow A_1(x)=0;\quad A_2(x)=0;\ \ldots;\ A_n(x)=0:$$

Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ: Այսպես, օրինակ,

$$(x^2-9)\left(\frac{4}{x-3}-1\right)=0 \qquad (4)$$

հավասարման լուծումը բերվում է

$$x^2-9=0;\qquad \frac{4}{x-3}-1=0 \qquad (5)$$

հավասարումների համախմբին: (5) համախմբի արմատներն են՝ $x_1=-3;$ $x_2=3;$ $x_3=7:$ Մինչդեռ $x=3$ դեպքում $\frac{4}{x-3}$ արտահայտությունը որոշված չէ: Հետևաբար, $x=3$-ը (4) հավասարման արմատ չէ:

Ընդհանրապես, (2) հավասարման արմատները գտնելու համար վերցնում են (3) համախմբի արմատներից այն և միայն այն թվերը, որոնք պատկանում են $A(x)$-ի ԹԱԲ-ին:

Դիտողություն: *Եթե $A(x)$-ը ռացիոնալ ամբողջ արտահայտություն է, ապա (2) հավասարումը և (3) հավասարումների համախումբը համարժեք է, այսինքն՝*

$$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)=0 \Leftrightarrow (A_1(x)=0;\quad A_2(x)=0;\quad \ldots;\quad A_n(x)=0):$$

Օրինակ 1: Լուծենք $x^3-4x^2+2x-8=0$ հավասարումը:

Լուծում: Հավասարման ձախ մասը վերածենք բազմապատկիչների: Դրա համար բավական է կատարել այսպիսի պարզ խմբավորում՝

$$(x^3-4x^2)+(2x-8)=0:$$

Այնուհետև կունենանք՝

$$x^2(x-4)+2(x-4)=0,\quad (x-4)(x^2+2)=0:$$

Վերջին հավասարումը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համախմբին՝

$$x - 4 = 0; \quad x^2 + 2 = 0:$$

Առաջին հավասարումից ստանում ենք $x = 4$: Երկրորդ հավասարումը, ակնհայտորեն, արմատ չունի: Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի մեկ արմատ, այն է՝ 4:

Օրինակ 2: Լուծենք հետևյալ հավասարումը.

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0:$$

Լուծում: $x + \dfrac{1}{x}$-ը փոխարինելով y-ով, նկատում ենք, որ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2:$$

Այդ դեպքում տրված հավասարումը բերվում է y-ի նկատմամբ քառակուսային հավասարման՝

$$2(y^2 - 2) - 7y + 9 = 0:$$

Լուծելով այդ հավասարումը, կունենանք՝ $y_1 = 1, \quad y_2 = 2{,}5$:

Դրանով իսկ հարցը հանգում է հավասարումների հետևյալ համախումբը լուծելուն՝

$$x + \frac{1}{x} = 1, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}:$$

Ստացված հավասարումներից առաջինն արմատ չունի, երկրորդ հավասարումից կստանանք՝ $x = 2$, $x = \dfrac{1}{2}$, որոնք էլ կկազմեն տրված հավասարման արմատները:

Օրինակ 3: Լուծենք $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$ հավասարումը:

Լուծում: Հավասարման ձախ մասը գումարների զույգ-զույգ խմբավորմամբ (օրինակ 1-ի նմանությամբ) հնարավոր չէ վերածել բազմապատկիչների: Վարվենք այսպես. փորձենք այդ բազմանդամի որոշ գումարելիներ ներկայացնել այնպիսի գումարելիների տեսքով, որ խմբավորման եղանակով հնարավոր լինի այն վերածել բազմապատկիչների.

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = x^3 + (x^2 + 8x^2) + (8x + 15x) + 15 =$$

$$= (x^3 + x^2) + (8x^2 + 8x) + (15x + 15) = x^2(x+1) + 8x(x+1) + 15(x+1) =$$

$$= (x+1)(x^2 + 8x + 15):$$

Հետևաբար, տրված հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարմանը՝

$$(x+1)(x^2+8x+15)=0\,:$$

Մնում է լուծել հավասարումների հետևյալ համախումբը՝

$$x+1=0; \qquad x^2+8x+15=0\,:$$

Առաջին հավասարումից կստանանք՝ $x=-1$, իսկ երկրորդից՝ $x=-3;$ $x=-5$: Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի երեք արմատ՝ $x_1=-1,$ $x_2=-3,$ $x_3=-5$:

Օրինակ 4: Լուծենք $x^3-3x^2-13x-6=0$ հավասարումը:

Լուծում: Այս հավասարումը ևս կարելի է լուծել նախորդ օրինակների նմանությամբ (արտադրիչների վերլուծելու եղանակով): Ցուցաբերենք այլ մոտեցում:

Ամենից առաջ փորձենք, այսպես կոչված, ***հայրենպրանքի*** մեթոդի օգնությամբ փնտրել հավասարման ամբողջ արմատները: Օգտվենք ամբողջաթիվ արմատների գոյության անհրաժեշտ պայմանից (գլուխ III, §2, կետ 4): Նշենք ազատ անդամի բաժանարարները.

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6\,:$$

Տեղադրությամբ համոզվում ենք, որ $x=-2$-ը տրված հավասարման արմատ է: Այժմ օգտվենք այն բանից, որ $x^3-3x^2-13x-6$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $x-(-2)$-ի, այսինքն՝ $x+2$-ի: Կատարելով այդ բաժանումը, արդյունքում կունենանք՝

$$x^3-3x^2-13x-6=(x+2)(x^2-5x-3)\,:$$

Հետևաբար, տրված հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$(x+2)(x^2-5x-3)=0\,:$$

Մնում է լուծել $x+2=0$, $x^2-5x-3=0$ հավասարումների համախումբը:

Երկրորդ հավասարման արմատները $\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$ և $\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$ թվերն են:

Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի երեք արմատ՝

$$x_1=-2, \quad x_2=\frac{5-\sqrt{37}}{2}, \qquad x_3=\frac{5+\sqrt{37}}{2}\,:$$

Դիտողություն: Սխեմատիկ ներկայացնենք այլ եղանակ, որի միջոցով $P(x)=x^3-3x^2+x-6$ բազմանդամը, գտած՝ $x=-2$ արմատի միջոցով, առանց անկյունաձև բաժանման, վերածվում է արտադրիչների.

$$
\begin{array}{l}
\underline{\quad P(x)=x^3-3x^3-13x-6 \quad} \\
- \\
\underline{P(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-13(-2)-6}
\end{array}
$$

$$P(x)-P(-2)=\left(x^3-(-2)^3\right)-3\left(x^2-(-2)^2\right)-13(x-(-2)):$$

$$P(x)-P(-2)=(x+2)(x^2-2x+4)-3(x+2)(x-2)-13(x+2)=$$

$$=(x+2)(x^2-2x+4-3x+6-13)=(x+2)(x^2-5x-3):$$

Քանի որ $P(-2)=0$, ուստի $x^3-3x^2-13x-6=(x+2)(x^2-5x-3)$:

Օրինակ 5: Լուծենք $9x^3-12x^2+8x-5=0$ հավասարումը:

Լուծում: Տրված հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք այնպիսի թվով, որ x^3-ի գործակիցը դառնա ինչ-որ ամբողջ թվի խորանարդ: Որպես այդպիսի բազմապատկիչ կարող է լինել 3-ը: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$27x^3-36x^2+24x-15=0,$$

որը կարելի է գրել

$$(3x)^3-4\cdot(3x)^2+8\cdot 3x-15=0$$

տեսքով: $3x$-ը փոխարինելով y-ով, կստանանք՝

$$y^3-4y^2+8y-15=0:$$

Նախորդ օրինակների նմանությամբ գտնում ենք ստացված հավասարման արմատները. այն ունի միակ արմատ՝ $y=1$ (հիմնավորեք): Քանի որ $x=\dfrac{y}{3}$, ուստի $x=\dfrac{1}{3}$, որն էլ կլինի տրված հավասարման միակ արմատը:

Օրինակ 6: Լուծենք $8x^6+7x^3-1=0$ հավասարումը:

Լուծում: Կիրառենք նոր փոփոխականի ներմուծման եղանակը: Տեղադրենք՝ $y=x^3$: Այդ դեպքում տրված հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $8y^2+7y-1=0$: Լուծելով ստացված քառակուսային հավասարումը կունենանք՝ $y=-1$ կամ $y=\dfrac{1}{8}$: Խնդիրը հանգեցվում է $x^3=-1$, $x^3=\dfrac{1}{8}$ հավասարումների համախմբի լուծմանը, որտեղից կստանանք տրված հավասարման արմատները՝ $x=-1$ կամ $x=\dfrac{1}{2}$:

Օրինակ 7: Լուծենք հետևյալ հավասարումը.

$$(x^2+2x-3)^2+4x(x^2+2x-3)-12x^2=0:$$

Լուծում: Հավասարման երկու մասերը բաժանելով x^2 մեծության վրա, կստանանք համարժեք հավասարում (նախապես նկատելով, որ $x=0$ –ն այդ հավասարման արմատ չէ):

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x}\right)^2+4\cdot\frac{x^2+2x-3}{x}-12=0:$$

Ներմուծենք նոր փոփոխական՝ $\frac{x^2-x-3}{x}=y$:

Այդ դեպքում հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$y^2+4y-12=0:$$

Ստացված քառակուսային հավասարման արմատներն են՝ $y_1=-6,\ \ y_2=2$:

Այսպիսով, տրված հավասարման լուծումը հանգում է

$$\frac{x^2+2x-3}{x}=-6; \qquad \frac{x^2+2x-3}{x}=2$$

հավասարումների համախմբի լուծմանը:

Առաջին հավասարման արմատներն են՝

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{22}}{7}, \qquad x_2=\frac{-1+\sqrt{22}}{7},$$

իսկ երկրորդ հավասարումն արմատ չունի:

Պատասխան՝ $\left\{\frac{-1-\sqrt{22}}{7};\ \ \frac{-1+\sqrt{22}}{7}\right\}$:

Օրինակ 8: Լուծենք $x^4+2x^3-7x^2-4x+4=0$ հավասարումը:

Լուծում: Այս հավասարումն ունի հետաքրքիր առանձնահատկություն. նրա առաջին գործակցի և ազատ անդամի հարաբերությունը հավասար է երկրորդ գործակցի ու նախավերջին գործակցի հարաբերության քառակուսուն: Այդ առանձնահատկությամբ օժտված հավասարումն անվանում են անդրադարձ: Այդ օրինակի վրա ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է լուծել չորրորդ աստիճանի անդրադարձ հավասարումը: Հավասարման երկու մասերը բաժանելով x^2–ու վրա, կստանանք նրան համարժեք հավասարում (քանի որ $x=0$ արժեքը տրված հավասարման համար արմատ չէ).

$$x^2+2x-7-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0,$$

և, այնուհետև՝

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{2}{x}\right)-7=0: \qquad (6)$$

Դիցուք, $x-\frac{2}{x}=y$, այդ դեպքում $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=y^2$, որտեղից՝ $x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$:

(6) հավասարման մեջ $\left(x-\frac{2}{x}\right)$ –ը փոխարինելով y–ով, իսկ $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)$ –ն՝ y^2+4 –ով, կունենանք՝

$$y^2+2y-3=0:$$

Ստացված քառակուսային հավասարման արմատներն են՝ $y_1=1$, $y_2=-3$:

Անդրադառնալով նշանակմանը, կունենանք

$$x-\frac{2}{x}=1, \quad x-\frac{2}{x}=-3$$

հավասարումների համախումբը: Համախմբի առաջին հավասարման արմատներն են՝ $-1, 2$, իսկ երկրորդ հավասարման արմատները՝ $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$:

Այսպիսով, տրված հավասարման արմատներն են՝

$$x_1=-1, \quad x_2=2, \quad x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}:$$

Դիտողություն: Չորրորդ աստիճանի անդրադարձ հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝ $ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$ (մասնավորաբար, $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$), որը $y=x+\frac{k}{x}$ $\left(y=x+\frac{1}{x}\right)$ նոր փոփոխականի ներմուծմամբ հանգեցվում է քառակուսային հավասարման:

Օրինակ 9: Լուծենք $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27$ հավասարումը:

Լուծում: Հավասարման ձախ մասն իրենից ներկայացնում է արտահայտությունների քառակուսիների գումար: Դրանից անջատենք գումարի կամ տարբերության քառակուսի՝ օգտվելով $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ կամ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ բանաձևից:

Մի դեպքում կունենանք՝

$$\left(x+\frac{3x}{x+3}\right)^2-2x\frac{3x}{x+3}=27\text{, այսինքն՝ }\left(\frac{x^2+6x}{x+3}\right)^2-\frac{6x^2}{x+3}=27\text{,}$$

Մյուս դեպքում՝

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+2x\frac{3x}{x+3}=27\text{, այսինքն՝ }\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+\frac{6x^2}{x+3}=27\text{:}$$

Հասկանալի է, որ տրված առաջադրանքի համար նպատակահարմար է կիրառել երկրորդ ձևափոխությունը: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ $\frac{x^2}{x+3}=y$, կունենանք՝

$$y^2+6y-27=0\text{, որտեղից՝ } y=-9\text{, } y=3\text{:}$$

Խնդիրը հանգեցվում է

$$\frac{x^2}{x+3}=-9\text{, }\quad\frac{x^2}{x+3}=3$$

հավասարումների համախմբի լուծմանը: Առաջին հավասարումն արմատ չունի, երկրորդից գտնում ենք՝ $x=\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$: Վերջին երկու թվերը (և միայն դրանք) տրված հավասարման արմատներն են:

Հարցեր

1. Ո՞ր հավասարումն են անվանում ռացիոնալ:
2. Ո՞ր հավասարումն են անվանում ռացիոնալ ամբողջ:
3. Որո՞նք են ռացիոնալ հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդ-ները:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (7–16).

7. ա) $x^3-8x=0$, բ) $x^5+8x^2=0$:

8. ա) $x^3+4x^2-2x-8=0$, բ) $x^3-3x^2+4x-12=0$:

9. ա) $x^3+x-2=0$, բ) $x^3-7x-6=0$:

10. ա) $x^3+7x^2+4x-2=0$, բ) $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$:

11. ա) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9$, բ) $\dfrac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$:

12. ա) $4x^3+6x^2+4x+1=0$, բ) $10x^3-3x^2-2x+1=0$:

13. ա) $6x^3-13x^2+9x-2=0$, բ) $4x^3+6x^2+5x+69=0$:

14. ա) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$; բ) $(x-2)^4+(x-4)^4=5$:

15. ա) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$, բ) $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$:

16. ա) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$, բ) $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0$:

§ 4. ՄՈԴՈՒԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Այդպիսի հավասարումները (կարճ՝ ***մոդուլով հավասարումներ***) լուծելիս հիմնականում կիրառում են հետևյալ հնարները.

1) Ազատվում են մոդուլի նշանից (այլ կերպ՝ բացում են մոդուլը)՝ ելնելով մոդուլի սահմանումից բխող հետևյալ փաստից՝

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{եթե } f(x)\geq 0, \\ -f(x), & \text{եթե } f(x)<0 \end{cases} \qquad (1)$$

Այս մեթոդը կիրառում են հատկապես այն դեպքում, երբ հավասարման մեջ առկա է մոդուլի մեկ նշան:

2) Հավասարման երկու մասերը բարձրացնում են քառակուսի՝ ելնելով այն փաստից, որ եթե $\varphi(x)$-ը x փոփոխականով որևէ արտահայտություն է, ապա նրա ԹԱԲ-ին պատկանող բոլոր x-երի դեպքում $|\varphi(x)|\geq 0$ և $|\varphi(x)|^2=(\varphi(x))^2$:

Այս մեթոդը կիրառում են հատկապես $|f(x)|=|g(x)|$ տեսքի հավասարումը լուծելիս: Վերն ասվածից հետևում է, որ

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2=(g(x))^2: \qquad (2)$$

3) Թվային ուղիղը տրոհում են առանձին միջակայքերի այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրում հնարավոր լինի տրված մոդուլով հավասարումը ներկայացնել առանց մոդուլի նշանի (ազատվում են մոդուլի բոլոր նշաններից): Այդ մեթոդը կիրառվում է հատկապես այն դեպքում, երբ հավասարման մեջ առկա են մեկից ավելի մոդուլով արտահայտություններ:

Լուծման այդ եղանակը, այլ կերպ, անվանում են ***միջակայքերի եղանակ***:

Վերը թվարկած հնարներն ու նկատառումները պարզաբանենք օրինակներով:

Օրինակ 1: Լուծենք $|4x-7|=5$ հավասարումը:

Լուծում: Օգտվելով (1) առնչությունից՝ տրված հավասարումը բերում ենք իրեն համարժեք երկու համակարգերի հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} 4x-7\ge 0, \\ 4x-7=5; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-7<0, \\ 4x-7=-5: \end{cases}$$

Այս համախմբի առաջին համակարգից կգտնենք՝ $x=3$, իսկ երկրորդ համախմբից՝ $x=0,5$: Հետևաբար տրված հավասարումն ունի երկու արմատ՝ 0,5 և 3:

Օգտակար ենք համարում նշել, որ՝

եթե $a<0$, ապա $|f(x)|=a$ հավասարումն արմատ չունի,

եթե $a>0$, ապա $|f(x)|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-a, \\ f(x)=a: \end{array} \right.$

Վերջին փաստը բխում է հետևյալ առնչություններից՝

$$\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ f(x)=a \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=a \text{ կամ } \begin{cases} f(x)<0, \\ f(x)=-a \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=-a:$$

Այսպիսով, օրինակ 1-ի լուծումը հակիրճ կներկայացվի այսպես.

$$|4x-7|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-7=5, \\ 4x-7=-5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=0,5: \end{array} \right.$$

Ակնհայտ է, որ $|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0$:

Օրինակ 2: Լուծենք $|3-2x|=6+x$ հավասարումը:

Լուծում: Ազատելով մոդուլի նշանից, հավասարումը հանգեցնում ենք իրեն համարժեք համակարգերի համախմբի՝

$$\begin{cases} 3-2x\ge 0, \\ 3-2x=6+x; \end{cases} \quad \begin{cases} 3-2x<0, \\ 3-2x=-6-x: \end{cases}$$

Ստացված համախմբի առաջին համակարգից կունենանք՝ $x=-1$, իսկ երկրորդից՝ $x=9$: Հետևաբար, հավասարման արմատների բազմությունը $\{-1;9\}$-ն է:

Օրինակ 3: Լուծենք $|8x+1|=|4x-15|$ հավասարումը:

Լուծում: Օգտվելով (2) պնդումից, կարող ենք գրել՝

$$|8x+1|=|4x-15| \Leftrightarrow (8x+1)^2=(4x-15)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((8x+1)-(4x-15))((8x+1)+(4x-15))=0 \Leftrightarrow x=-4; \quad x=\frac{7}{6}:$$

Դիտողություն: Նկատենք, որ

$$(f(x))^2=(g(x))^2 \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x): \end{array}\right.$$

Հետևաբար, ելնելով (2) պնդումից, կարող ենք ամրագրել՝

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x): \end{array}\right. \qquad (3)$$

Այդ նկատառումով օրինակ 3-ի լուծումը կներկայացվի այսպես.

$$|8x+1|=|4x-15| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x+1=4x-15, \\ 8x+1=15-4x: \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=\dfrac{7}{6}: \end{array}\right.$$

Օրինակ 4: Լուծենք $|5-x|-|x+4|=9$ հավասարումը:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ հավասարման մեջ գտնվող մոդուլները զրո արժեք են ընդունում, համապատասխանաբար, $x=5$ և $x=-4$ արժեք-ների դեպքում: Այդ կետերով թվային ուղիղը տրոհվում է երեք միջա-կայքերի՝

$$(-\infty;-4); \quad [-4;5]; \quad (5;\infty):$$

Տրված հավասարումը լուծենք այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում, այսինքն՝ լուծենք տրված հավասարմանը համարժեք հետևյալ համա-կարգերի համախումբը.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-4, \\ (5-x)+(x+4)=9; \end{cases} \\ \begin{cases} -4\le x\le 5, \\ (5-x)-(x+4)=9; \end{cases} \\ \begin{cases} x>5, \\ -(5-x)-(x+4)=9; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-4, \\ 9=9; \end{cases} \\ \begin{cases} -4\le x\le 5, \\ x=-4; \end{cases} \\ \begin{cases} x>5, \\ -9=9: \end{cases} \end{array}\right.$$

Վերջին համախմբի առաջին համակարգի լուծումների բազմությունը $(-\infty;-4)$ միջակայքն է, երկրորդ համակարգի լուծումն է՝ $x=-4$, իսկ երրորդ համակարգը լուծում չունի: Միավորելով ստացված լուծումները՝ կստանանք տրված հավասարման արմատների բազմությունը՝ $(-\infty;-4]$:

Դիտողություն: *Հիշեցնում ենք, որ սույն գլխում մենք դիտարկում ենք միայն ռացիոնալ հավասարումներ և անհավասարումներ: Դրա համար էլ այստեղ քննարկվում են մոդուլ պարունակող այնպիսի հավասարումներ, որոնք հանգեցվում են ռացիոնալ հավասարումների: Նման հավասարումները լուծելիս մենք առնչվում ենք նաև պարզ անհավասարումների հետ, որոնք, ըստ էության, չեն լուծվում (տես 1–5 օրինակների լուծումները): Այդպիսի յուրաքանչյուր անհավասարումն ուղղակի պայման է, որի առկայության դեպքում ստացվում է համապատասխան ռացիոնալ հավասարումը:*

Անհավասարումների մասին մանրամասն տեղեկությունները քննարկվելու են հաջորդ պարագրաֆում:

Հարցեր

1. Ի՞նչ հնարներ են կիրառվում՝ փոփոխականը մոդուլի նշանի տակ պարունակող հավասարումները լուծելիս:
2. Կարելի՞ է պնդել, որ $|f(x)|=g(x)$ հավասարումը համարժեք է $f(x)=g(x)$, $f(x)=-g(x)$ հավասարումների համախմբին:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (1–12).

17. ա) $|4x-3|=5$, բ) $|x^3-x|=-2$:

18. ա) $|4-5x|=4x-5$, բ) $|2x-9|=9-2x$:

19. ա) $\dfrac{|x+2|}{3}=\dfrac{x+2}{5}+x$, բ) $\dfrac{7x+4}{5}-x=\dfrac{|3x-5|}{2}$:

20. ա) $|7x+5|=|1-x|$, բ) $|3x-4|=2|x+3|$:

21. ա) $|x^2+x-1|=2x-1$, բ) $|x^2-x-3|=-x-1$:

22. ա) $x^2-6|x|+8=0$, բ) $3x^2-|x|=24$:

23. ա) $|x-1|+|x-2|=1$, բ) $2|x+3|-|x-4|=4$:

24. ա) $|x-1|+|2x-1|=2|x|$, բ) $|2x+1|-|3-x|=|x-4|$:

25. ա) $|x^2-9|+|x-2|=5$, բ) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$:

26. ա) $|2x-9|=|x^2-2x-6|$, բ) $|x-x^2-1|=|2x-3-x^2|$:

27. ա) $||3-2x|-1|=2|x|$, բ) $|3x-|2x-5||=x+5$:

28. ա) $\dfrac{|x^2-x|+1}{|x+1|-x^2}=1$, բ) $\dfrac{|x^2+4x+3|-x}{|x^2+2x+2|}=1$:

§ 5. ԻՌԱՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Իռացիոնալ են կոչվում այն հավասարումները, որոնց մեջ փոփոխականը (փոփոխականի նկատմամբ ռացիոնալ արտահայտությունը) առնվազն մեկ տեղում գտնվում է արմատանշանի կամ կոտորակային աստիճան բարձրացնելու նշանի տակ: Օրինակ, իռացիոնալ հավասարումներ են՝

$$x^2+\sqrt[3]{x}=66, \qquad \sqrt{x^2-3x}=x+1, \qquad (x+5)^{\frac{3}{4}}-(x+5)^{\frac{1}{4}}=6:$$

Իռացիոնալ հավասարումները լուծելու համար, որպես կանոն, հիմնականում ազատվում են արմատանշաններից (կոտորակային ցուցիչից), փոխարինելով դրանք ռացիոնալ հավասարումներով,: Այդ նպատակին հասնելու համար ավելի հաճախ հավասարման երկու մասերը բարձրացնում են միևնույն աստիճան և երբեմն էլ ներմուծում են նոր փոփոխական:

Իռացիոնալ հավասարումները լուծելիս անհրաժեշտ է հաշվի առնել հետևյալ կարևոր փաստերը.

1) Եթե արմատի ցուցիչը զույգ թիվ է, ապա արմատապատկ արտահայտությունը պետք է լինի ոչբացասական. այդ դեպքում արմատի արժեքը ևս ոչբացասական է:

2) Եթե արմատի ցուցիչը կենտ թիվ է, ապա արմատապատկ արտահայտությունը կարող է լինել ցանկացած իրական թիվ. այդ դեպքում արմատի նշանը համընկնում է արմատապատկ արտահայտության նշանի հետ:

Դիտարկենք

$$\sqrt[n]{f(x)}=g(x) \tag{1}$$

տեսքի հավասարումը $(n\ge 2,\ n\in N)$:

Դիցուք n–ը զույգ թիվ է: Այդ դեպքում, եթե $g(x)<0$, ապա (1) հավասարումը լուծում չունի, քանի որ նրա ձախ մասը ոչ մի x–ի դեպքում չի կարող ընդունել բացասական արժեք: Հետևաբար, զույգ n–ի դեպքում (1) հավասարման համար $g(x)\ge 0$–ն անհրաժեշտ պայման է: Ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝

1) $\sqrt[2k]{f(x)}=g(x)\Rightarrow f(x)=(g(x))^{2k} \qquad (k\in N)$,

$$2)\ \sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2k} \end{cases} \qquad (k \in N):$$

Մասնավորաբար,

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2 : \end{cases}$$

Դիտողություն: *Երկրորդ պնդումից հետևում է, որ (1) հավասարումը լուծելիս անհրաժեշտություն չի առաջանում ներկայացնել այդ հավասարման թաք-ը որոշող պայմանը կամ՝ գտնել այն: Դրա համար բավական է գտնել* $f(x) = (g(x))^n$ *հավասարման արմատները և դրանցից առանձնացնել այն թվերը, որոնք բավարարում են* $g(x) \geq 0$ *պայմանին:*

Կենտ n–երի դեպքում ($n \geq 3$*) (1) հավասարման երկու մասերը բարձրացնելով n աստիճան, կստանանք նրան համարժեք հավասարում, այսինքն՝ ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝*

$$3)\ \sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \left(g(x)\right)^{2k+1}, \text{ որտեղ } k \in N :$$

Բերենք իռացիոնալ հավասարումների լուծման մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1: Լուծենք հավասարումը՝

$$\sqrt{3x^3 - 3x + 1} = 2x - 1 : \qquad (2)$$

Լուծում: (2) հավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} 3x^3 - 3x + 1 = (2x-1)^2, & (3) \\ 2x - 1 \geq 0 : & (4) \end{cases}$$

(3) հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրին՝

$$3x^2 - 3x + 1 = 4x^2 - 4x + 1, \quad 3x^3 - 4x + x = 0, \quad x(3x^2 - 4x + 1) = 0 :$$

Վերջին հավասարման (հետևաբար նաև (3) հավասարման) արմատներն են՝ $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{3}$: Ստացված թվերից միայն x_2-ն է բավարարում (4) պայմանին: Նշանակում է՝ (2) հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ՝ $x = 1$:

Օրինակ 2: Լուծենք հետևյալ հավասարումը՝

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} = \sqrt[3]{2x-1} \qquad (6)$$

Լուծում: (6) հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք խորանարդ՝ օգտվելով $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ նույնությունից.

$$2x+1+3\cdot\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\cdot(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1})+6x+1=2x-1:$$

Ստացված հավասարման մեջ $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}$ արտահայտությունը ((6) հավասարման ձախ մասը) փոխարինելով $\sqrt[3]{2x-1}$-ով ((6) հավասարման աջ մասով), որոշ պարզեցումներից հետո կունենաք հետևյալ հավասարումը՝

$$\sqrt[3]{(2x+1)(6x+1)(2x-1)}=-2x-1:$$

Վերջին հավասարման երկու մասերը բարձրացնելով խորանարդ, կստանանք՝

$$(2x+1)(6x+1)(2x-1)=-(2x+1)^3,$$

այնուհետև հաջորդաբար կունենանք՝

$$(2x+1)(6x+1)(2x-1)+(2x+1)^3=0,$$
$$(2x+1)\left((6x+1)(2x-1)+(2x+1)^2\right)=0,$$
$$(2x+1)\left(12x^2-4x-1+4x^2+4x+1\right)=0,$$
$$16x^2(2x+1)=0,\ \ x=0;\ \ x=-0,5:$$

Ստացված արժեքները հերթականությամբ տեղադրելով (6) հավասարման մեջ, կհամոզվենք, որ $x=0$-ն կողմնակի արմատ է: Հետևաբար, սկզբնական հավասարումն ունի միակ արմատ՝ $x=-0,5$:

Օրինակ 3: Լուծեք հավասարումը՝

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}: \qquad (5)$$

Լուծում: Հավասարման երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի, կստանանք դրան հետևանք հավասարումը՝

$$x+1-2\sqrt{(x+1)(9-x)}+9-x=2x-12:$$

Առանձնացնելով արմատանշանով արտահայտությունը, կունենանք այդ հավասարման համարժեք հավասարում՝

$$\sqrt{-x^2+8x+9}=11-x:$$

Ստացված հավասարման երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի, այնուհետև կատարելով նման անդամների միացում, կստանանք այդ հավասարման հետևանք հավասարում՝

$$x^2-15x+56=0:$$

Այս քառակուսի հավասարման արմատներն են՝ $x_1=7,\ x_2=8$: Կատարենք ստուգում՝ (5) հավասարման մեջ անմիջական տեղադրումով.

ա) $x=7$, $\sqrt{7+1}-\sqrt{9-7}=\sqrt{2\cdot7-12}$, $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}=\sqrt{2}$:

Նշանակում է՝ $x=7$-ը տրված հավասարման արմատն է:

բ) $x=8$, $\sqrt{8+1}-\sqrt{9-8}=\sqrt{2\cdot8-12}$, $3-1=2$, $2=2$: $x=8$-ը ևս (5) հավասարման արմատ է:

Պատասխան՝ $x=7$; $x=8$:

Օրինակ 4: Լուծենք հետևյալ հավասարումը՝

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}=8\sqrt[3]{(x-1)^2}:$$

Լուծում: Նկատենք, որ $x=1$-ը տրված հավասարման համար արմատ չէ:

Հետևաբար, հավասարման երկու մասերը բաժանելով $\sqrt[3]{(x-1)^2}$-ի վրա, կստանանք իրեն համարժեք հավասարում՝

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=8:$$

Այնուհետև, ստացված հավասարման տեսքից պարզ երևում է, որ անհրաժեշտ է կատարել փոփոխականի փոխարինում՝ $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=y$:

Կստանանք քառակուսի հավասարում՝ $y^2+2y-8=0$, որտեղից կգտնենք՝ $y=-4$ կամ $y=2$:

Այսպիսով, անհրաժեշտ է լուծել հավասարումների հետևյալ համախումբը՝

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=-4; \qquad \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=2:$$

Այնուհետև կունենանք՝ $\frac{x+1}{x-1}=-64$; $\frac{x+1}{x-1}=8$, որտեղից էլ կստանանք՝ $x=\frac{63}{65}$; $x=\frac{9}{7}$:

Քանի որ լուծման բոլոր քայլերում պահպանվել է համարժեքությունը, ուստի ստացված երկու արժեքներին էլ տրված հավասարման արմատներն են:

Օրինակ 5: Լուծենք հավասարումը՝

$$\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5: \qquad (7)$$

Լուծում: Ներմուծենք նոր փոփոխականներ՝

$$\sqrt[4]{77+x}=p; \qquad \sqrt[4]{20-x}=q:$$

Դժվար չէ նկատել, որ $p^4+q^4=97$: Այսպիսով, կունենանք հավասա-րումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} p+q=5, \\ p^4+q^4=97: \end{cases} \tag{8}$$

Նախապես կատարենք ոչ բարդ ձևափոխություններ.

$$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=\left[(p+q)^2-2pq\right]^2-2p^2q^2=$$
$$=(25-2pq)^2-2(pq)^2=2(pq)^2-100pq+625:$$

Հետևաբար, համակարգի երկրորդ հավասարումը բերվում է

$$(pq)^2-50pq+264=0$$

տեսքի, որը pq նկատմամբ քառակուսի հավասարում է: Լուծելով այն, կգտնենք՝

$$pq=6 \text{ կամ } pq=44:$$

Հետևաբար, (8) համակարգը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համակարգերի համախմբին՝

$$\begin{cases} p+q=5, \\ pq=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} p+q=5, \\ pq=44: \end{cases}$$

Երկրորդ համակարգը լուծում չունի, իսկ առաջին համակարգից գտնում ենք՝

$$p=2,\ q=3 \text{ կամ } p=3,\ q=2:$$

Անդրադառնալով սկզբնական անհայտին, կունենանք՝

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{77+x}=2 \ \ (\sqrt[4]{20-x}=3), \\ \sqrt[4]{77+x}=3 \ \ (\sqrt[4]{20-x}=3), \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-61, \\ x=4: \end{array}\right.$$

Տեղադրելով ստացված արժեքները (7) հավասարման մեջ, համոզվում ենք, որ այդ երկու թվերն էլ նրա արմատներն են:

Երբեմն հաջողվում է իռացիոնալ հավասարումները լուծել՝ կիրառելով արհեստական եղանակ:

Օրինակ 6: Լուծենք

$$\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1: \qquad (9)$$

հավասարումը:

Լուծում: Հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք

$$\varphi(x)=\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}$$

արտահայտությամբ (տրված հավասարման ձախ մասի համալուծով): Քանի որ

$$\left(\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}\right)=\left(\sqrt{x^3-4x^2+x+15}\right)^2-$$

$$-\left(\sqrt{x^3-4x^2-x+13}\right)^2=\left(x^3+4x^2+x+15\right)-\left(x^3-4x^2-x+13\right)=2x+2,$$

ուստի (9) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$2x+2=(x+1)\left(\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}\right),$$

այնուհետև՝

$$(x+1)\left(\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}-2\right)=0:$$

Հեշտ է նկատել, որ $x=-1$-ը վերջին հավասարման արմատ է: Մնում է լուծել

$$\left(\sqrt{x^3-4x^2+x+15}-\sqrt{x^3-4x^2-x+13}\right)=2 \qquad (10)$$

հավասարումը:

Գումարելով (9) և (10) հավասարումները, կունենանք՝

$$2\sqrt{x^3-4x^2+x+15}=x+3:$$

Ստացված հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի՝

$$4\left(x^3+4x^2+x+15\right)=x^2+6x+9,$$

այնուհետև կունենանք՝

$$4x^3 - 17x^2 - 2x + 51 = 0,$$
$$(x-3)(4x^2 - 5x - 17) = 0,$$
$$x - 3 = 0;\ \ 4x^2 - 5x - 17 = 0,$$
$$x = 3;\ \ x = \frac{5-\sqrt{297}}{8};\ \ x = \frac{5+\sqrt{297}}{8}:$$

Ստուգում: Գտած չորս արժեքները հերթականությամբ տեղադրելով (9) հավասարման մեջ, կհամոզվենք, որ դրանցից միայն երկուսն են բավարարում նրան՝ $x = 3;\ x = \frac{5-\sqrt{297}}{8}$:

Դիտողություն: *(6) հավասարման երկու մասերը խորանարդ բարձրացնելով ստացել ենք համարժեք հավասարում: Սակայն $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1}$ արտահայտության փոխարինումը $\sqrt[3]{2x-1}$ արտահայտությամբ կարող է հանգեցնել (և, ինչպես ցույց տվեց ստուգումը՝ հանգեցրեց) կողմնակի արմատի առաջացմանը: Բանն այն է, որ մենք տրված հավասարման ձախ մասի արտահայտությունը փոխարինել ենք իրեն ոչ նույնաչափ հավասար աջ մասի արտահայտությամբ:*

Անցնենք փոփոխականի փոխարինման եղանակով լուծվող որոշ օրինակների:

Հարցեր

1. Ո՞ր հավասարումներն են անվանում իռացիոնալ:
2. Իռացիոնալ հավասարումները լուծելիս ինչ պնդումներ են կիրառվում:

Առաջադրանքներ

29. Ապացուցել 1–3–րդ պնդումները:

Գտնել հավասարման ԹԱԲ–ը (30–35).

30. $2\sqrt{5-x} = \sqrt{x+3} + 2x$,

31. $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x - 3$,

32. $\sqrt[3]{x+7} = \frac{x^2-3}{x}$,

33. $\sqrt[4]{-x} + \sqrt{2x+1} = 1 - 3x$,

34. $\sqrt{3-x} + \sqrt[6]{x-5} = x^2 - 5x$,

35. $\sqrt[4]{x-2} - 3x = \sqrt{2-x} - 6$:

Լուծել հավասարումը (36–41).

36. $\sqrt{3x+7}=2$,

37. $\sqrt{8-3x^2}=-4$,

38. $\sqrt[5]{3x-2}=-2$,

39. $\sqrt[6]{7x+1}=2$,

40. $\sqrt{2x+2}=x-3$,

41. $\sqrt{x^2+8}-2x=1$

Նշել հավասարման որևէ արմատ (42–45).

42. $\sqrt[3]{x+7}=23-x$,

43. $\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+4}=2$,

44. $\sqrt{x+4}+\sqrt[4]{2x+6}=5$,

45. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2-49}=2x^2+14x$:

Ապացուցել, որ հավասարումն արմատ չունի (46–49).

46. $\sqrt{x^2+5}=2-\sqrt[4]{x}$,

47. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=x-5$,

48. $\sqrt[4]{5x+8}=-x^2+x-1$,

49. $\sqrt[4]{x^2+2}+5\sqrt{x^2+4}=11$:

Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները (50–53).

50. $2\sqrt{x}-7x^2=2x+2\sqrt{x}$ և $-7x^2=2x$:

51. $\sqrt{x}+2=\sqrt{2x}$ և $\left(\sqrt{x}+2\right)^2=\left(\sqrt{2x}\right)^2$:

52. $\sqrt{2x-5}=x+1$ և $2x-5=(x+1)^2$:

53. $\sqrt[4]{3x^4+1}=-x^2-1$ և $3x^4+1=\left(-x^2-1\right)^2$:

Լուծել հավասարումը (54–65).

54. $\sqrt{5x^2+3x-1}=2x+1$,

55. $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$,

56. $\sqrt{x+16}-\sqrt{2x-15}=1$,

57. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$,

58. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$,

59. $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$,

60. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$,

61. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$,

62. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$,

63. $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=4$,

64. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$,

65. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

4. գ) $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;2)\cup(2;\infty)$: **5.** ա) Ո՛չ, բ) ո՛չ, գ) այո, դ) ո՛չ, ե) այո՛, զ) ո՛չ, է) այո՛, ը) այո՛: **6.** ա) Այո՛, բ) ո՛չ, գ) ո՛չ, դ) ո՛չ, ե) ո՛չ, զ) այո՛: **8.** ա) $-4;\pm\sqrt{2}$, բ) 3: **10.** ա) $-1;-3;\pm\sqrt{11}$, բ) $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};3$: **11.** ա) $\frac{1}{2};2$, բ) $-2;\pm1;0$: **12.** ա) $-\frac{1}{2}$, բ) $-\frac{1}{2}$: **13.** ա) $\frac{1}{2};\frac{2}{3};1$, բ) –3: **14.** ա) –5; –3, բ) $3\pm\sqrt{2}$: ***Ցուցում:*** $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ տեսքի հավասարումը $y=x+\frac{a+b}{2}$ փոփոխականի փոխարինումով հանգեցվում է երկքառակուսային հավասարման: **15.** ա) $\frac{1}{2};2$, բ) $\frac{1}{2};2;\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$: **16.** ա) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, բ) –1; $-\frac{1}{4}$: **18.** բ) $(-\infty;4{,}5]$: **19.** բ) $\frac{17}{19};3$: **20.** բ) $-\frac{2}{5};10$: **21.** բ) $-\sqrt{2};\ 1-\sqrt{5}$: **23.** ա) $[1;2]$: **24.** ա) $\frac{2}{5};2$: **25.** ա) –3; 2; $\frac{\sqrt{65}-1}{2}$: բ) $[-3;-2]\cup[2;3]$: **27.** բ) $\{0\}\cup\left[\frac{5}{2};\infty\right)$: **28.** ա) $[0;1]$: **30.** $[-3;5]$: **31.** $(-\infty;\infty)$: **32.** $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$: **33.** $\left[-\frac{1}{2};0\right]$:

34. $\varnothing$: **35.** $\{2\}$: **50.** Ո՛չ: **51.** Այո՛: **52.** Այո՛: **53.** Ո՛չ: **55.** 2; 10: **56.** 20: **57.** 4: **58.** –7; 2: **59.** 12: **60.** 1; 2: **61.** –1: **62.** $\frac{63}{13}$: ***Ցուցում:*** Հավասարման ձախ մասի արմատանշանները ներկայացնել 6–րդ աստիճանների արմատանշաններով, այնուհետև երկու մասերը բաժանել աջ մասի արտահայտության վրա և ներմուծել նոր փոփոխական: **63.** $x\in[1;5]$: **64.** 15: **65.** 4: