ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

§ 1. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ: ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆ

1. Մեկ փոփոխականով բազմանդամի հասկացությունը

Սահմանում: x փոփոխականի նկատմամբ ***բազմանդամ*** է կոչվում

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

տեսքի արտահայտությունը, որտեղ n–ը ոչբացասական ամբողջ թիվ է, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ –ը որոշ իրական թվեր են:

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ թվերն անվանում են բազմանդամի ***գործակիցներ***. a_0 գործակիցն անվանում են նաև ***ազատ*** անդամ, a_nx^n գումարելին՝ ***ավագ անդամ***, a_n –ը՝ ***ավագ գործակից***:

Եթե $a_n \neq 0$, ապա n թիվը կոչվում է բազմանդամի ***աստիճան***, համապատասխան բազմանդամը՝ n–րդ աստիճանի բազմանդամ: (1) տեսքն անվանում են n–րդ աստիճանի բազմանդամի ***կանոնական*** կամ ***ստանդարտ*** տեսք: Մեկ փոփոխականով բազմանդամները ներկայացնելիս ամենուրեք պահպանում են նրա ստանդարտ տեսքը:

x փոփոխականով բազմանդամների համար, կրճատ գրելաձևի համար, սովորաբար գործածում են $P(x), Q(x), R(x), \ldots$ նշանակումները: Եթե ցանկանում են ընդգծել, որ $P(x)$ բազմանդամն n–րդ աստիճանի է, ապա բառերի փոխարեն երբեմն հակիրճ գրառում են՝ $P_n(x)$:

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ բազմանդամի ***արժեքը*** $x = b$ դեպքում (b կետում) կոչվում է

$$P(b) = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1b + a_0$$

թիվը:

$P_0(x)=a_0$ $(a_0 \neq 0)$ զրո աստիճանի բազմանդամները զրոյից տարբեր իրական թվերն են: Եթե (1) բազմանդամի բոլոր գործակիցները հավասար լինեն զրոյի, ապա այն կունենա $0x^n+0x^{n-1}+\ldots+0x+0$ տեսքը և ցանկացած x–ի ու բնական n թվի դեպքում հավասար կլինի 0–ի: Այդ նկատառումով էլ 0 թիվը նույնպես համարում են բազմանդամ և անվանում՝ ***զրոյական***: Զրոյական բազմանդամը միակ բազմանդամն է, որը չունի աստիճան: Պայմանավորվենք՝ զրոյական $P(x)$ բազմանդամի համար գործածել $P(x)\equiv 0$ գրառումը և կարդալ՝ $P(x)$–ը նույնաբար հավասար է 0–ի: Այն փաստը, որ $P(x)$ բազմանդամը զրոյական չէ, հակիրճ գրառվում է այսպես՝ $P(x)\not\equiv 0$:

$P_n(x)$ և $Q_m(x)$ բազմանդամները համարվում են ***հավասար*** (գրում են՝ $P_n(x)=Q_m(x)$, երբեմն նաև՝ $P_n(x)\equiv Q_m(x)$), եթե $n=m$ և հավասար են նաև x–ի միևնույն աստիճանի համապատասխան գործակիցները: Այլ կերպ՝ հավասար բազմանդամներն այն բազմանդամներն են, որոնք ունեն միևնույն ստանդարտ տեսքը:

Հարցեր

1. Ինչպիսի՞ արտահայտությունն են անվանում մեկ՝ x փոփոխականով բազմանադամ:
2. Որո՞նք են անվանում բազմանդամի գործակիցներ: Ո՞ր գործակիցն են անվանում բազմանդամի ազատ անդամ: Ո՞ր անդամ են անվանում բազմանդամի ավագ անդամ:
3. Ո՞ր դեպքում են ասում, որ բազմանդամը n–րդ աստիճանի է:
4. Որո՞նք են կոչվում զրո աստիճանի բազմանդամներ:
5. Ի՞նչն են անվանում զրոյական բազմանդամ:

Առաջադրանքներ

1. Նշել բազմանդամի աստիճանը և գործակիցները.

ա) $3x^2-x+7$, բ) x^3-5x-1, գ) $-x^4+4x^2+2x$,

դ) $x^{10}-1$, ե) $-x^8+2x^6-5x^4+12x^2-9$, զ) 8:

2. Արտահայտությունը ներկայացնել բազմանդամի ստանդարտ տեսքով.

ա) $5(x-x^3)+2x(x^2-4)-3(x-6)$, բ) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+1)$,

գ) $(4x^2-3)^2-(2x+1)^3+(x^2-2)(x^2+7)$, դ) $x(x-1)(x-2)(x-3)$:

3. Գտնել $P(x)$ բազմանդամի արժեքը նշված կետում.

ա) $P(x)=13x^4-5x^3+18x^2-x+20,\qquad x=0,$

բ) $P(x)=8x^6-7x^5+25x^4-x^3-17,\qquad x=-1,$

գ) $P(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1,\qquad x=1,$

դ) $P(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+\ldots+x^2-x,\qquad x=-2$:

4. Գտնել $(3x^2-2)^{100}(x+1)^{10}$ արտահայտության փակագծերը բացելիս և նման անդամների միացումից հետո ստացված բազմանդամի.

ա) բոլոր գործակիցների գումարը,

բ) x-ի զույգ ցուցիչով աստիճանների բոլոր գործակիցների գումարը,

գ) x-ի կենտ ցուցիչով աստիճանների բոլոր գործակիցների գումարը:

5*. $P(x)=ax^2+bx+c$ քառակուսային եռանդամն այնպիսին է, որ $P(0)$, $P(-1)$ և $P(1)$ թվերն ամբողջ են: Ապացուցել, որ ցանկացած ամբողջ x-ի դեպքում $P(x)$-ն ամբողջ թիվ է:

2. Բազմանդամների բաժանելիությունը

Բազմանդամների տեսության մեջ առանձնահատուկ տեղ են զբաղեցնում բազմանդամների բաժանելիությանը վերաբերող հարցերը: Հանգամանորեն քննարկենք այդ հարցերը:

Դիցուք՝ $P(x)$-ը n-րդ աստիճանի $(n\in N)$ բազմանդամ է, իսկ $Q(x)$-ը՝ ոչ զրոյական բազմանդամ:

Եթե գոյություն ունի այնպիսի $T(x)$ ***բազմանդամ, որ ցանկացած*** x***-ի դեպքում տեղի ունի***

$$P(x)=T(x)\cdot Q(x)$$

հավասարությունը, ապա ասում են, որ $P(x)$ ***բազմանդամը բաժանվում է*** $Q(x)$ ***բազմանդամի (կամ՝*** $Q(x)$***-ը բաժանում է*** $P(x)$***-ը)***:

Այդ դեպքում $T(x)$ բազմանդամը կոչվում է $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$-ի բաժանելիս ստացված ***քանորդ***:

Ինչպես բնական թվերի բազմությունում, այնպես էլ բազմանդամների բազմությունում միշտ չէ, որ բաժանումն իրագործելի է:

Օրինակ, $P(x)=x^2+5$ բազմանդամը չի բաժանվում $Q(x)=x-2$ բազմանդամի (ինչո՞ւ):

Սակայն տեղի ունի ավելի ընդհանուր գործողություն, որը կոչվում է ***մնացորդով բաժանում***:

Դիցուք՝ տրված են 1–ից ոչ ցածր աստիճանի $P(x)$ բազմանդամը և ոչ զրոյական $Q(x)$ բազմանդամը:

Ընդունված է ասել, որ $P(x)$ ***բազմանդամը մնացորդով բաժանվում է*** $Q(x)$ (ոչ զրոյական) ***բազմանդամի, եթե գոյություն ունեն այնպիսի*** $T(x)$ ***և*** $R(x)$ ***բազմանդամներ, որ ցանկացած*** x***–ի դեպքում տեղի ունենա***

$$P(x) = Q(x) \cdot T(x) + R(x)$$

հավասարությունը, ընդ որում՝ $R(x)$ ***–ի աստիճանը փոքր լինի*** $Q(x)$ ***–ի աստիճանից կամ*** $R(x) \equiv 0$:

Այդ դեպքում $T(x)$ բազմանդամը կոչվում է ***ոչ լրիվ քանորդ***, իսկ $R(x)$–ը՝ ***մնացորդ***՝ $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$ բազմանդամի ***բաժանելիս***:

Եթե $R(x) \equiv 0$, ապա ասում են, որ $P(x)$ –ն ամբողջությամբ (առանց մնացորդի) ***բաժանվում է*** $Q(x)$ –ի և գրում են՝ $P(x) \vdots Q(x)$: Այդ դեպքում $Q(x)$ –ը կոչվում է $P(x)$ բազմանդամի ***բաժանարար***:

Դիտարկենք մասնավոր դեպքեր:

Երբ $P(x) \equiv 0,$ իսկ $Q(x)$ –ը կամայական ոչ զրոյական բազմանդամ է, ապա $T(x) \equiv 0$ և $R(x) \equiv 0$ բազմանդամները կբավարարեն սահմանման պայմաններին:

Այն դեպքում, երբ $P(x)$ բազմանդամի աստիճանը փոքր է $Q(x)$ –ի աստիճանից, ապա $P(x)$ –ը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$P(x) = Q(x) \cdot 0 + P(x) \ :$$

Քանի որ $P(x)$ –ի աստիճանը փոքր է $Q(x)$ –ի աստիճանից, ապա $P(x)$ –ն էլ հենց մնացորդն է: Այնպես, որ այդ դեպքում ևս $P(x)$ –ը մնացորդով բաժանվում է $Q(x)$ –ի:

Օրինակ, $P(x)=x^2+x+1$ բազմանդամը $Q(x)=3x^4-x^3+1$ բազմանդամի բաժանելիս իրագործվում է $x^2+x+1=(3x^4-x^3+1)\cdot\ 0+x^2+x+1$ հավա– սարությամբ ($T(x)$ քանորդը զրոյական բազմանդամ է, իսկ մնացորդը՝ $R(x)=x^2+x+1$):

Որպես օրինակ, $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + 9x\ - 3$ բազմանդամը բաժանենք $Q(x) = 3x^2 + x$ բազմանդամի:

Ըստ սահմանման՝ մեզ անհրաժեշտ է գտնել այնպիսի $Q(x)$ և $R(x)$ բազմանդամներ, որ $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ հավասարությունը լինի նույ– նություն և բացի այդ, $R(x)$–ի աստիճանը փոքր լինի $Q(x)$–ի աստիճանից:

Ամենից առաջ նկատենք, որ $T(x)$ քանորդի ավագ անդամը պետք է լինի $6x^4 : 3x^2 = 2x^2$: Կազմենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$P(x)-2x^2Q(x)=-9x^3+9x^2-3:$$

Ստացված բազմանդամը նշանակենք $E(x)$–ով: Քանի որ $E(x)$–ի աստիճանը մեծ է $Q(x)$–ի աստիճանից, շարունակում ենք բաժանման պրոցեսը: Այն նկատառումով, որ $E(x)$–ի և $Q(x)$–ի ավագ գործակիցների հարաբերությունը հավասար է $-3x$–ի, այժմ կազմենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$E(x)-(-3x)\cdot\ T(x)=-9x^3+9x^2-3-(-3x)(3x^2+x)=12x^2-3=F(x):$$

$F(x)$–ի աստիճանը հավասար է $Q(x)$–ի աստիճանին: Հաշվի առնելով այն, որ $F(x)$–ի և $Q(x)$–ի ավագ գործակիցների հարաբերությունը հավասար է 4–ի, կազմենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$F(x)-4Q(x)=(12x^2-3)-4(3x^2+x)=-4x-3=R(x):$$

$R(x)$–ի աստիճանը փոքր է $T(x)$–ի աստիճանից: Հետևաբար, $-4x-3$–ը՝ $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$ բազմանդամի բաժանելիս ստացված մնացորդն է: Այսպիսով, ստանում ենք.

$$6x^4-7x^3+9x^2-3=(3x^2+x)(2x^2-3x+4)+(-4x-3):$$

Այստեղ քանորդը $T(x)=2x^2-3x+4$ բազմանդամն է:

Բերված օրինակը ցույց է տալիս, որ անկյունաձև բաժանումով ցանկացած $P(x)$ բազմանդամը կարելի է բաժանել ցանկացած ոչզրոյական $Q(x)$ բազմանդամի, եթե միայն $P(x)$–ի աստիճանը փոքր չէ $Q(x)$–ի աստիճանից և $Q(x)$–ը ոչզրոյական բազմանդամ է:

$P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$ բազմանդամի բաժանելիս կարելի է ընդունել հետևյալ կանոնը.

1) բաժանելին և բաժանարարը դասավորել սպանդարտ տեսքով (x–ի աստիճանների նվազման կարգով),

2) բաժանելիի ավագ անդամը բաժանել բաժանարարի ավագ անդամի վրա և ստացված միանդամը համարել քանորդի ավագ անդամ,

3) քանորդի ավագ անդամը բազմապատկել բաժանարարով և արդյունքը հանել բաժանելիից. ստացված տարբերությունը հանդիսանում է առաջին մնացորդը,

4) քանորդի հաջորդ գումարելին ստանալու համար անհրաժեշտ է առաջին մնացորդի հետ վարվել այնպես, ինչպես վերը նշված 2–րդ և 3–րդ կետերում:

Այս ընթացակարգն անհրաժեշտ է շարունակել այնքան, քանի դեռ չի ստացվել զրո մնացորդ կամ այնպիսի մնացորդ, որի աստիճանը փոքր է բաժանարարի աստիճանից:

Բնական հարց է ծագում. ցանկացած $P(x)$ և $Q(x)$ բազմանդամների համար հնարավո՞ր է արդյոք իրագործել մնացորդով բաժանում: Հետևյալ թեորեմն այդ հարցին տալիս է դրական պատասխան:

Թեորեմ: ***Կամայական*** $P(x)$ ***և ոչ զրոյական*** $Q(x)$ ***բազմանդամների համար գոյություն ունեն այնպիսի*** $T(x)$ ***և*** $R(x)$ ***բազմանդամներ, որ***

$$P(x)=Q(x)T(x)+R(x), \tag{2}$$

ընդ որում, $R(x)$***-ի աստիճանը փոքր է*** $Q(x)$***-ի աստիճանից կամ*** $R(x)\equiv 0$: Այդպիսի $T(x)$ և $R(x)$ բազմանդամները որոշվում են միարժեքորեն:

Գոյություն ունեն տարբեր եղանակներ՝ բազմանդամը բաժանելիս ստացված քանորդը և մնացորդը որոշելու համար: Ամենից հաճախ օգտվում են «անկյունաձև» բաժանման եղանակից:

Ցածր դասարաններից հայտնի թվերի բաժանման «անկյունաձև» եղանակի հիմքում ընկած է թվերի մնացորդով բաժանման հայտնի կանոնը: Քանի որ այդ կանոնը ճիշտ է նաև բազմանդամների համար, ապա արդյունքում ստանում ենք բազմանդամների բաժանման համանման եղանակ:

$6x^4-7x^3+9x^2-3$ բազմանդամը $(3x^2+x)$-ի վրա «անկյունաձև բաժանումը» տարվում է այսպես.

$$\begin{array}{r|l}
6x^4-7x^3+9x^2-3 & 3x^2+x \\ \cline{2-2}
-\;\underline{6x^4+2x^3\qquad\qquad} & 2x^2-3x+4 \\
-9x^3+9x^2-3 & \\
-\;\underline{-9x^3-3x^2\qquad} & \\
12x^2-3 & \\
-\;\underline{12x^2+4x} & \\
-4x-3 &
\end{array}$$

Հետևաբար,

$$6x^4-7x^3+9x^2-3=(3x^2+x)(2x^2-3x+4)+(-4x-3),$$

այսինքն՝ $Q(x)=2x^2-3x+4$ բազմանդամը քանորդն է, իսկ $R(x)=-4x-3$-ը՝ մնացորդը:

Ապացուցենք բազմանդամների բաժանման միակությունը: Ենթադրենք հակառակը՝ $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$ բազմանդամի բաժանումը կարելի է իրականացնել երկու ձևով.

$$P(x)=Q(x)\cdot T_1(x)+R_1(x) \quad \text{և} \quad P(x)=Q(x)\cdot T_2(x)+R_2(x):$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$R_1(x)-R_2(x)=Q(x)\,(T_1(x)-T_2(x)):$$

Եթե $T_1(x)-T_2(x)$ տարբերությունը չլինի զրոյական բազմանդամ, ապա $R_1(x)-R_2(x)$ բազմանդամը կբաժանվի $T(x)$ բազմանդամի, որը հնարավոր չէ, քանի որ $(R_1(x)-R_2(x))$–ի աստիճանը փոքր է $T(x)$–ի աստիճանից: Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ $R_1(x)\equiv R_2(x)$ և $T_1(x)\equiv T_2(x)$: Հետևաբար, մնացորդով բաժանումն իրականացվում է միակ եղանակով:

Բազմանդամների բաժանելիության վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս երբեմն կիրառվում է նաև, այսպես կոչված, ***անորոշ գործակիցների մեթոդը***:

Վերը նշված բազմանդամների համար որոնելի քանորդը և մնացորդն այդ մեթոդով գտնում են հետևյալ կերպ: Քանի որ առաջին բազմանդամը 4–րդ աստիճանի է, իսկ մյուսը՝ 2–րդ, ուստի քանորդը փնտրում են $T(x)=ax^2+bx+c$ տեսքով, իսկ մնացորդը՝ $R(x)=dx+e$ տեսքով (առայժմ a,b,c,d,e գործակիցները հայտնի չեն (***անորոշ են***)): Ըստ (2) հավասարության՝

$$6x^4-7x^3+9x^2-3=(3x^2+x)(ax^2+bx+c)+dx+e:$$

Այս հավասարության (նույնության) աջ մասը ներկայացնելով բազմանդամի ստանդարտ տեսքով, և օգտվելով բազմանդամների հավասարության պայմանից, կունենանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 6=3a, \\ -7=3b+a, \\ 9=3c+b, \\ 0=c+d, \\ -3=e: \end{cases}$$

Այդ համակարգից կստանանք՝ $a=2,\ b=-3,\ c=4,\ d=-4,\ e=-3$:

Նշանակում է՝ $T(x)=2x^2-3x+4, \quad R(x)=-4x-3$:

Դիտողություն: *Ընդհանրապես, անորոշ գործակիցների մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում. $P_n(x)$ բազմանդամը $Q_m(x)$ $(n\geq m)$ բազ–*

մանդամի բաժանելիս նախապես հեշտությամբ կարելի է որոշել $T(x)$ քանորդի և $R(x)$ մնացորդի կտեպերը ($T(x)$-ը $(n-m)$ աստիճանի բազմանդամ է, իսկ $R(x)$-ը՝ $(m-1)$-ից ոչ բարձր աստիճանի: Սակայն հնարավոր չէ անմիջապես որոշել այդ բազմանդամների անհայտ (անորոշ) գործակիցները: (2) նույնության մեջ $P_n(x)$-ը, $Q_m(x)$-ը, $T(x)$-ը և $R(x)$-ը փոխարինում են իրենց արտահայտություններով: Այնուհետև, այդ հավասարության աջ մասը բերում են ստանդարտ տեսքի (ձախ մասն արդեն այդպիսին է), որից հետո համեմատում են աջ և ձախ մասերի x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցները: Արդյունքում ստանում են հավասարումների համակարգ, որը հնարավորություն է տալիս գտնելու որոնելի գործակիցները (որով և հայտնի են դառնում քանորդ և մնացորդ բազմանդամները):

Հարցեր

1. Ո՞ր դեպքում են ասում. «$P(x)$ բազմանդամը բաժանվում է $Q(x)$ բազմանդամի»:
2. Ո՞ր դեպքում են ասում. «$P(x)$ բազմանդամը մնացորդով բաժանվում է $Q(x)$ բազմանդամի»:
3. Հնարավո՞ր է, որ $P(x)$ բազմանդամը որևէ $Q(x)$ բազմանդամի բաժանելիս մնացորդը լինի $P(x)$:
4. Ի՞նչ եղանակով կարելի է իրագործել մնացորդով բաժանման գործողությունը:

Առաջադրանքներ

6. Գտնել $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$ բազմանդամի վրա բաժանելիս ստացվող քանորդը և մնացորդը.

ա) $P(x)=x^4+x^2-x-3$, $\quad Q(x)=x^2+1$;

բ) $P(x)=2x^6-3x^5+5x^3-6$, $\quad Q(x)=x^3+x+1$;

գ) $P(x)=x^{10}+2$, $\quad Q(x)=x^5-1$;

դ) $P(x)=x^7-1$, $\quad Q(x)=x-1$;

ե) $P(x)=x^2-x+1$, $\quad Q(x)=2x^4+x^3$:

7. Բաժանվո՞ւմ է, արդյոք, $x^{100}-8x^{20}+7$ բազմանդամը x^2-1 բազմանդամի:

8. Ապացուցել, որ x^5+1 բազմանդամը $x^{30}-x^{15}-x^{20}+x^5$ բազմանդամի բաժանարար է:

9. Ապացուցել, որ $x^{20}+x^{19}+1$ բազմանդամը բաժանվում է x^2+x+1 բազմանդամի:

10. m–ի և n–ի ինչ արժեքների դեպքում x^3+mx+n բազմանդամն առանց մնացորդի կբաժանվի $x^2+3x+10$ եռանդամի:

11. Ապացուցել, որ եթե n–ը 3–ին բազմապատիկ բնական թիվ է, ապա x^n-1 բազմանդամը բաժանվում է x^2+x+1 բազմանդամի:

12. a–ի և b–ի ինչ արժեքների դեպքում $x^5+ax^4-3x^2+2bx-10$ բազմանդամը կբաժանվի x^2+x-2 բազմանդամի վրա:

§ 2. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐ: ՎԻԵՏԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ԹԵՈՐԵՄԸ

1. Բեզուի թեորեմը

Առանձնակի հետաքրքրություն է ներկայացնում $P(x)$ բազմանդամն առաջին աստիճանի՝ $x-a$ տեսքի բազմանդամի վրա բաժանելիության հարցը: Դիցուք,

$$P(x)=(x-a)T(x)+r,$$

որտեղ $T(x)$–ը քանորդն է, իսկ r մնացորդը մի որոշ իրական թիվ է: Եթե այդ նույնության մեջ տեղադրենք $x=a$, ապա կստանանք $P(a)=r$ թվային ճիշտ հավասարությունը: Դրանով իսկ ապացուցվում է հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ: *$P(x)$ **բազմանդամը** $(x-a)$–**ի բաժանելիս ստացված մնացորդը հավասար է** $P(x)$ **բազմանդամի արժեքին**՝ $x=a$ **դեպքում*** (Բեզուի թեորեմ[1]):

Դիտողություն: ***Դժվար չէ համոզվել, որ** $P(x)$ **բազմանդամը** $Q(x)=ax+b$ **առաջին աստիճանի բազմանդամի բաժանելիս ստացված մնացորդը հավասար***

[1] *Այդ պնդումն առաջին անգամ ձևակերպել և ապացուցել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս **Էթյեն Բեզուն** (1730–1783), որի հիմնական աշխատանքները վերաբերում են բարձրագույն հանրահաշվին:*

է այդ բազմանդամի արժեքին՝ $x=-\frac{b}{a}$ *կետում, այսինքն՝* $R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$:

Օրինակ 1: Գտնենք $P(x)=x^5-x^4+3x^2-7x+11$ բազմանդամը $(x+2)$-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

Լուծում: Բեզուի թեորեմի համաձայն $P(x)$-ը $x-(-2)$ երկանդամի բաժանելիս ստացվող մնացորդը հավասար է $P(-2)$-ի: Հետևաբար, որոնելի մնացորդը կլինի՝

$$P(-2)=(-2)^5-(-2)^4+3(-2)\ -7(-2)+11=-11:$$

Օրինակ 2: Գտնենք՝ x^n+b^n բազմանդամը $(x+b)$-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը, որտեղ $n\in N$, $b\neq 0$:

Լուծում: Քանի որ $x+b=x-(-b)$, ուստի որոնելի մնացորդը գտնելու համար բավական է $P(x)=x^n+b^n$ արտահայտության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրել $-b$: Կունենանք՝

$$P(-b)=(-b)^n+b^n=\begin{cases}0, & \text{եթե } n\text{-ը կենտ է,}\\ 2b^n, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է:}\end{cases}$$

Միաժամանակ ապացուցում ենք, որ x^n+b^n բազմանդամը բաժանվում է $(x+b)$-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ n-ը կենտ է:

Օրինակ 3: x փոփոխականով բազմանդամը $(x-2)$-ի և $(x-3)$-ի բաժանելիս տալիս է, համապատասխանաբար, 5 և 7 մնացորդներ: Գտնել այդ բազմանդամը $(x-2)(x-3)$-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

Լուծում: Նկատենք, որ $P(x)$ բազմանդամը $(x-2)(x-3)$-ի բաժանելիս որոնելի մնացորդը կունենա $ax+b$ տեսքը.

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b: \qquad (6)$$

Մյուս կողմից, օգտվելով Բեզուի թեորեմից, խնդրի պայմանները կարող ենք ներկայացնել այսպես՝ $P(2)=5$, $P(3)=7$: Հետևաբար, (6) հավասարության մեջ հերթականությամբ տեղադրելով $x=2$ և $x=3$, կունենանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}5=2a+b,\\ 7=3a+b,\end{cases}$$

որտեղից գտնում ենք՝ $a=2$, $b=1$: Հետևաբար, որոնելի մնացորդը կլինի՝ $2x+1$:

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում

$$P(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - \frac{n^2+n}{2}$$

բազմանդամը բաժանվում է $(x-1)$-ի:

Լուծում: Գտնենք $P(x)$-ի արժեքը $x=1$ կետում.

$$P(1) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{1+n}{2} \cdot n - \frac{n^2+n}{2} = 0:$$

Նշանակում է՝ $P(x)$ բազմանդամը $(x-1)$-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը հավասար է 0-ի (ըստ Բեզուի թեորեմի): Հետևաբար, $P(x)$-ը բաժանվում է $x-1$ գծային երկանդամի վրա:

Հարցեր

1. Ինչի՞ է հավասար $P(x)$ բազմանդամը $(x-1)$-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:
2. Առանց բաժանման գործողություն կատարելու ինչպե՞ս կարելի է որոշել՝ $P(x)$ բազմանդամը բաժանվո՞ւմ է արդյոք $(x+1)$-ի:

Առաջադրանքներ

13. Գտնել $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 6x^2 + 10x - 9$ բազմանդամը $x+2$-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

14. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում $x^n - a^n$ բազմանդամը բաժանվում է $x-a$ երկանդամի:

15. Ապացուցել, որ $(x^{2k} - a^{2k}) \vdots (x+a)$ («$\vdots$» – բաժանվում է առանց մնացորդի), որտեղ $k \in N$:

16. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական k թվի դեպքում $x^{2k} + a^{2k}$ բազմանդամը $a \neq 0$ դեպքում չի բաժանվում ո՛չ $(x-a)$-ի և ո՛չ էլ՝ $(x+a)$-ի:

17. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $3x^4 - 2x^3 + 14x^2 + ax + b$ բազմանդամն $(x-2)$-ի բաժանելիս տալիս է 101-ին հավասար մնացորդ, իսկ $(x+1)$-ի բաժանելիս՝ 0 մնացորդ:

2. Բազմանդամի արմատներ

Դիցուք՝ $P(x)$–ը n–րդ աստիճանի բազմանդամ է.

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0 \quad (a_n\neq 0):$$

Եթե $P(x)$ բազմանդամի արժեքը $x=a$ դեպքում հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $P(a)=0$, ապա a թիվը կոչվում է $P(x)$ ***բազմանդամի արմատ***: Այդ դեպքում նաև ասում են, որ a թիվը x փոփոխականով (անհայտով)

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=0 \tag{3}$$

հավասարման արմատ է:

(3) հավասարումն անվանում են n–րդ աստիճանի ***հանրահաշվական հավասարում: Լուծել (3) հավասարումը*** նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր արմատները, կամ, որ նույնն է՝ գտնել $P(x)$ բազմանդամի բոլոր արմատները: Վերն ասվածից հետևում է, որ $P(x)=0$ հավասարման լուծման խնդիրը համարժեք է $P(x)$ բազմանդամի առաջին աստիճանի (գծային) արտադրիչներն առանձնացնելու խնդրին:

Դիտողություն: *$n=1$ և $n=2$ դեպքերում (3) հավասարումը վերածվում է, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ աստիճանի (քառակուսային) հավասարումների, որոնց արմատները գտնելու կանոնները հայտնի են միջին դպրոցի դասընթացից:*

Թեև երրորդ և չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների համար ևս գոյություն ունեն արմատները գտնելու բանաձևեր (որոնք ուսումնասիրվում են բուհերում դասավանդվող բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում), սակայն դրանք այնքան մեծածավալ են (ներկայացվում են բազմաթիվ բարդ արմատների միջոցով), որ նախընտրում են չօգտվել դրանցից (բարձրագույն մաթեմատիկայում մշակված են տարբեր մեթոդներ, որոնք հնարավորություն են տալիս ուզած ճշգրտությամբ գտնելու հանրահաշվական հավասարման արմատների մոտավոր արժեքները):

Չորրորդից բարձր աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների արմատների համար նման բանաձևեր, ընդհանուր դեպքում, գոյություն չունեն: Այդ կարևոր փաստը XIX դարի 20–ական թվականներին ապացուցել է նորվեգացի մաթեմատիկոս Ն. Աբելը (1802–1829):

Նախորդ կետում դիտարկված Բեզուի թեորեմից հետևում են հետևյալ կարևոր պնդումները.

Թեորեմ 1: ***Եթե α թիվը $P(x)$ բազմանդամի արմատ է, ապա այդ բազմանդամը բաժանվում է $(x-\alpha)$–ի:***

Ապացուցում: Բեզուի թեորեմի համաձայն $P(x)$ բազմանդամը $(x-\alpha)$–ի բաժանելիս ստացվում է $P(\alpha)$ մնացորդը: Քանի որ, ըստ պայմանի՝ $P(\alpha)=0$, ուստի, իրոք, $P(x)$–ը բաժանվում է $(x-\alpha)$–ի վրա:

Թեորեմ 2: ***Եթե $P(x)$ բազմանդամը բաժանվում է $(x-\alpha)$–ի, ապա α թիվը $P(x)$ բազմանդամի արմատ է, այսինքն՝*** $P(\alpha)=0$:

Այս թեորեմի ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն:

Թեորեմ 3: ***Եթե $P(x)$ բազմանդամն ունի զույգ առ զույգ միմյանցից տարբեր $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ արմատներ, ապա այն բաժանվում է $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ արտադրյալի:***

Ապացուցում: Թեորեմ 1–ի համաձայն $P(x)$–ը բաժանվում է $(x-\alpha_1)$–ի: Քանորդում ստացվող բազմանդամը նշանակենք $T(x)$–ով.

$$P(x)=(x-\alpha_1)T(x): \tag{1}$$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $x=\alpha_2$, կստանանք՝

$$P(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot T(\alpha_2)$$

թվային ճիշտ հավասարությունը: Քանի որ, ըստ պայմանի, $P(\alpha_2)=0$ և $\alpha_2-\alpha_1 \neq 0$, ուստի $T(\alpha_2)=0$: Այդ նշանակում է, որ $x=\alpha_2$–ը $T(x)$ բազմանդամի արմատ է: Հետևաբար, ըստ թեորեմ 1–ի, $T(x)$–ը բաժանվում է $(x-\alpha_2)$–ի վրա: Դիցուք՝ այդ բաժանման արդյունքում քանորդում ստացվում է $Q(x)$ բազմանդամը: Այդ նկատառումով (1) հավասարությունը կներկայացվի հետևյալ կերպ.

$$P(x)=(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,Q(x):$$

Այդ նույնության մեջ տեղադրելով $x=\alpha_3$ և հաշվի առնելով թեորեմի պայմանները, համոզվում ենք, որ $Q(\alpha_3)=0$, այսինքն՝ $Q(x)$–ը բաժանվում է ($x-\alpha_3$)–ի վրա:

Նույն ձևով շարունակելով մնացած արմատների համար, ի վերջո կհասնենք այսպիսի հավասարության՝

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\cdot F(x),$$

որտեղ $F(x)$–ը որևէ բազմանդամ է:

Ստացված հավասարությունն էլ հիմնավորում է, որ $P(x)$ բազմանդամը բաժանվում է $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ արտադրյալի վրա:

Հետևանք: ***n–րդ աստիճանի $P(x)$ բազմանդամը չի կարող ունենալ իրարից տարբեր n–ից ավելի արմատներ:***

Հակասող ընդունելության եղանակով (ենթադրելով, որ $P(x)$–ը կարող է ունենալ $n+1$ արմատ), վերջին թեորեմի հիման վրա անմիջապես կստացվի հակասություն (համոզվեք դրանում):

Վերոնշյալ թեորեմներից կարող են ստացվել հետաքրքիր և օգտակար պնդումներ, մասնավորաբար, բազմանդամն արտադրիչների վերածելու բանաձևը, Վիետի ընդհանրացված բանաձևերը և այլն:

Եթե բնական k թիվն այնպիսին է, որ $P(x)$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $(x-\alpha)^k$-ի վրա, բայց չի բաժանվում $(x-\alpha)^{k+1}$-ի վրա, ապա ասում են, որ α-ն $P(x)$ բազմանդամի համար k–***պատիկ արմատ*** է:

Օրինակ, $(x-5)^3(x+1)^4(x+4)(x-7)$ արտահայտությունից ստացվող բազմանդամի համար 5 արմատի պատիկությունը երեքն է, –1-ինը՝ չորս, –4 և 7 արմատներինը՝ մեկ:

Բազմանդամի միապատիկ $(k=1)$ արմատն անվանում են նաև պարզ արմատ: Բերված օրինակում –4 և **7** արմատները նշված բազմանդամի պարզ արմատներն են:

Հարցեր

1. Ո՞ր դեպքում են ասում, որ $x=a$ թիվը $P(x)$ բազմանդամի արմատ է:
2. Ո՞ր հավասարումն են անվանում n-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարում:
3. Ի՞նչ անհրաժեշտ և բավարար պայմանի դեպքում $P(x)$ բազմանդամը կբաժանվի $x-a$ երկանդամի վրա:
4. Չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումը կարո՞ղ է ունենալ հինգ արմատ:
5. Ամենաշատը քանի՞ արմատ կարող է ունենալ n-րդ աստիճանի $P(x)$ բազմանդամը:

Առաջադրանքներ

18. Բերել երրորդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամի օրինակ, որի համար $x_1=-2$, $x_2=3$ և $x_3=5$ թվերը լինեն արմատներ:

19. Բերել չորրորդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամի օրինակ, որն ունենա ճիշտ երեք արմատ:

20. Հնարավո՞ր է, որ 6-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումը. ա) արմատ չունենա, բ) ունենա ճիշտ չորս արմատ:

21. Կարելի՞ է պնդել, որ հավասարումն արմատ ունի.

ա) $x^4-x^2-4x+5=0$, բ) $x^4-4x^3+5x^2-4x+4=0$,

գ) $\left(x^3+x+30\right)^2+x^4=81$, դ) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$:

22. Բերել 20-րդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամի օրինակ, որը.

ա) արմատ չունենա,

բ) ունենա ճիշտ մեկ արմատ,

գ) ունենա ճիշտ երկու արմատ,

դ) ունենա ճիշտ k արմատ, որտեղ $1 \le k \le 20$:

23. Ապացուցել, որ $x=1$ թիվը $P(x)$ բազմանդամի արմատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ բազմանդամի բոլոր գործակիցների գումարը հավասար է 0-ի:

3. Վիետի ընդհանրացված թեորեմը

Դիցուք՝ $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ բազմանդամն ունի իրարից տարբեր n արմատ՝ $\alpha_2, \alpha_2, .., \alpha_n$: Այդ դեպքում այն բաժանվում է $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)..(x-\alpha_n)$ արտադրյալի վրա (թեորեմ 3), ընդ որում ստացված քանորդը մի որոշ հաստատուն b թիվ է (կախված չէ x-ից).

$$P_n(x) = b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) : \tag{1}$$

Եթե (4) նույնության աջ մասը ներկայացնենք բազմանդամի ստանդարտ տեսքով և համեմատենք նրա երկու մասերի ավագ գործակիցները, ապա կստանանք՝ $b = a_n$: Հետևաբար,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) :^2 \tag{2}$$

Այնուհետև, համեմատելով ձախ և աջ մասերի՝ x-ի միևնույն աստիճանի մնացած համապատասխան գործակիցները, կունենանք առնչություններ բազմանդամի արմատների և նրա գործակիցների միջև, որոնք կրում են ***Վիետի բանաձևեր*** անվանումը.

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
&\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_2\alpha_n + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}:
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

2 (2) հավասարությունը, ըստ էության, բազմանդամը գծային արտադրիչների վերածելու բանաձևն է:

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

Եթե $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ իրական թվերը բավարարում են (5) համակարգին, ապա նրանք հանդիսանում են

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

բազմանդամի արմատները:

(5) համակարգի հավասարությունները կոչվում են ***Վիետի բանաձևեր***:

Մասնավորապես, երկրորդ աստիճանի $ax^2 + bx + c$ բազմանդամի x_1 և x_2 արմատների համար կունենանք.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}:$$

Եթե x_1, x_2, x_3 թվերը երրորդ աստիճանի $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ բազմանդամի արմատներն են, ապա Վիետի բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}:$$

Դիտողություն 1: *Վիետի բանաձևերը մնում են ուժի մեջ նաև այն դեպքում, երբ բազմանդամի համար առկա են բազմապատիկ (k–պատիկ, որտեղ $k \geq 2$) արմատներ: Այդ դեպքում անհրաժեշտ է միայն յուրաքանչյուր այդպիսի արմատը գրել այնքան անգամ, որքան նրա պատիկությունն է:*

Դիտողություն 2: *Դժվար չէ համոզվել, որ Վիետի բանաձևերի k–րդ ($k = 1, 2, \ldots, n$) տողում գրվող հավասարության ձախ մասը $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ թվերից կազմված բոլոր հնարավոր այնպիսի արտադրյալների գումար է, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է ճիշտ k արտադրիչ: Այդ գումարելիներից յուրաքանչյուր երկուսն իրարից տարբերվում են գոնե մեկ արտադրիչով: Կարելի է ապացուցել, որ k–րդ տողում եղած գումարելիների քանակը $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}$ է: Օրինակ, երկրորդ տողի ձախ մասում կա $\frac{n(n-1)}{2}$ գումարելի, իսկ երրորդ տողի ձախ մասում՝ $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ գումարելի:*

Հարցեր

1. Ի՞նչ տեսք կընդունեն Վիետի բանաձևերը երրորդ աստիճանի բազմանդամի համար:
2. Ի՞նչ տեսք կընդունեն Վիետի բանաձևերը չորրորդ աստիճանի բազմանդամի համար:

Առաջադրանքներ

24. Գրել Վիետի բանաձևերը $n=5$ դեպքում:

25. Կազմել երրորդ աստիճանի բազմանդամ, որի արմատները լինեն 2, –3 և 5 թվերը, իսկ ավագ գործակիցը՝ 4:

26. Կազմել քառակուսային այնպիսի հավասարում, որի արմատները լինեն x_1^2 և x_2^2, որտեղ x_1-ը և x_2-ը $x^2-5x-1=0$ հավասարման արմատներն են:

27. Կազմել երրորդ աստիճանի բազմանդամ, որի արմատները լինեն $x^3-6x^2+11x-6$ բազմանդամի արմատների քառակուսիները:

28. Հայտնի է, որ α, β և γ թվերը $x^3+px^2+qx+1=0$ հավասարման արմատներն են: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ գումարն արտահայտել p-ով և q-ով:

29. Ապացուցել, որ եթե միմյանցից տարբեր a, b, c երեք թվերը բավարարում են

$$a^3+pa+q=0, \quad b^3+pb+q=0 \quad \text{և} \quad c^3+pc+q=0$$

պայմաններին, ապա $a+b+c=0$:

30. Ապացուցել, որ եթե $x^3+ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա, ապա նրանցից մեկը հավասար է $-\dfrac{a}{3}$-ի:

31. Եթե $x^3+ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա, ապա նրանցից մեկը $-\sqrt[3]{c}$ թիվն է: Ապացուցել:

32. Գտնել $x^3-12x^2+mx-60=0$ հավասարման m գործակիցը, ելնելով այն պայմանից, որ այդ հավասարման արմատները մի որոշ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի երկարություններ են:

33. Ապացուցել, որ $a^3c=b^3$ պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $x^3+ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա:

§ 3. ԱՄԲՈՂՋ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՄԱՏՆԵՐԸ

1. Բազմանդամի ռացիոնալ արմատները

Բնական հարց է ծագում. ինչպե՞ս գտնել բազմանդամի (կամ հանրահաշվական հավասարման) գոնե մեկ արմատ: Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների դեպքում կարելի է փնտրել ռացիոնալ, մասնավորաբար, ամբողջ արմատները, եթե, իհարկե, այդպիսիք գոյություն ունեն:

Եթե ամբողջ գործակիցներով հանրահաշվական հավասարումն ունի ռացիոնալ արմատ, ապա այն կարելի է գտնել՝ օգտվելով հետևյալ թեորեմից.

Թեորեմ: ***Դիցուք՝ անկրճատելի*** $\frac{p}{q}$ ***կոտորակն ամբողջ գործակիցներով*** n***-րդ աստիճանի***

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0) \qquad (1)$$

հանրահաշվական հավասարման արմատ է: Այդ դեպքում p ***թիվը*** a_0 ***ազատ անդամի բաժանարար է, իսկ*** q***-ն՝*** a_n ***ավագ գործակցի բաժանարար:***

Ապացուցում: Քանի որ $\frac{p}{q}$-ը (1) հավասարման արմատ է, ուստի ճիշտ է հետևյալ թվային հավասարությունը՝

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0 : \qquad (2)$$

Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով q^{n-1}-ով, այն ներկայացնենք այսպես՝

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p q^{n+2} + a_0 q^{n-1}\right):$$

Թեորեմի պայմաններից և ստացված հավասարությունից պարզ երևում է, որ $a_n \cdot \frac{p^n}{q}$ թիվն ամբողջ է: Քանի որ p և q թվերը փոխադարձաբար պարզ են[3], ուստի p^n-ը և q-ն ևս փոխադարձաբար պարզ են[4]:

---

[3] *Երկու բնական թվեր կոչվում են **փոխադարձաբար պարզ**, եթե դրանք չունեն 1-ից տարբեր ընդհանուր բնական բաժանարար:*

[4] *Այդ պնդումն ապացուցելու համար բավական է p և q թվերը ներկայացնել պարզ բազմապատկիչների արտադրյալի տեսքով:*

Հետևաբար, a_n-ը բաժանվում է q-ի վրա, իսկ դա նշանակում է, որ q-ն a_n-ի բաժանարար է:

Այժմ (2) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք q^n-ով և այն ներկայացնենք այսպես՝

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n :$$

Ստացված հավասարության ձախ մասը բաժանվում է p-ի (քանի որ փակագծում եղած արտահայտությունն ամբողջ թիվ է): Հետևաբար, աջ մասը ևս բաժանվում է p-ի: Քանի որ q^n և p թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ուստի $a_0 \vdots p$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմից բխում են երկու կարևոր հետևանքներ:

Թեորեմից բխում են երկու կարևոր հետևանքներ:

Հետևանք 1: ***Եթե ամբողջ գործակիցներով բազմանդամն ունի ամբողջ արմատ, ապա այն ազատ անդամի բաժանարար է:***

Հետևանք 2: ***Եթե ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ավագ գործակիցը* 1 *է, ապա նրա ռացիոնալ արմատները*** (եթե, իհարկե, գոյություն ունեն) ***ամբողջ են:***

Բերենք օրինակներ:

Օրինակ: Լուծենք հավասարումը՝

$$2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0 :$$

Լուծում: Գտնենք հավասարման ռացիոնալ արմատները: Դիցուք, $\frac{p}{q}$ անկրճատելի կոտորակն այդ հավասարման արմատ է: Ըստ թեորեմ 3-ի՝ p թիվը պետք է փնտրել ազատ անդամի բաժանարարների, այսինքն՝ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ թվերի մեջ, իսկ q-ն՝ ավագ գործակցի դրական բաժանարարների մեջ: Այսպիսով, ռացիոնալ արմատները հարկավոր է փնտրել $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ թվերի մեջ: Ստուգումով պարզում ենք, որ -3-ը և $\frac{1}{2}$-ը տրված հավասարման արմատներն են: Հավասարման ձախ մասը վերածենք բազմապատկիչների: Քանի որ $x = -3$-ն արմատ է, ուստի հավասարման ձախ մասը բաժանվում է $(x+3)$-ի: Կատարելով «անկյունաձև բաժանում», տրված հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$(x+3)(2x^3 + x^2 + 3x - 2) = 0 :$$

Այժմ հարկավոր է լուծել $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$ հավասարումը: Մենք արդեն նկատել ենք, որ $x=\frac{1}{2}$-ն այդ հավասարման արմատ է. դա նշանակում է, որ վերջին հավասարման ձախ մասի բազմանդամը բաժանվում է $(2x-1)$-ի, այսինքն՝ $2x-1$ արտադրիչ կառաջանա, եթե $2x^3+x^2+3x-2$ բազմանդամը վերածենք բազմապատկիչների.

$$2x^3+x^2+3x-2=(2x^3-x^2)+(2x^2-x)+(4x-2)=(2x-1)(x^2+x+2):$$

Ստացված արտադրյալի երկրորդ բազմապատկիչն արմատ չունի, քանի որ այդ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը բացասական է: Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ՝ -3 և $\frac{1}{2}$:

Հարցեր

1. Ինչպե՞ս են որոնում ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ամբողջ թվով արտահայտված արմատները:
2. Ինչպե՞ս են որոնում ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ռացիոնալ արմատները:

Առաջադրանքներ

34. Բազմանդամը ներկայացնել ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների արտադրյալի տեսքով (վերածել բազմապատկիչների).

ա) x^3-5x^2-2x+6;   բ) $2x^3+5x^2+x-2$;

գ) $x^5+x^3-x^2-1$;   դ) x^4+2x^3-2x-1;

ե) $x^4-x^3-11x^2+31x-20$;   զ) $2x^4-7x^3-3x^2+5x-1$:

35. Գտնել հավասարման ամբողջ արմատները.

ա) $2x^3-7x^2+5=0$;   բ) $2x^3+x^2-13x+6=0$;

գ) $x^4+2x^3-2x-1=0$;   դ) $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=0$:

36. Գտնել հավասարման ռացիոնալ արմատները.

ա) $x^3+4x^2-9=0$;   բ) $4x^3+6x^2-6x+1=0$;

գ) $6x^4-7x^3-6x^2+2x+1=0$;   դ) $2x^4+7x^3+6x^2+7x-6=0$:

37. Գտնել $P(x)$ բազմանդամի արմատները.

ա) $P(x)=3x^3-5x^2-5x+6$,

բ) $P(x)=3x^6-14x^5+11x^4+28x^3-32x^2-16x+16$:

2. Հոռների սխեման

Դուք արդեն համոզվել եք, որ բազմանդամներին առնչվող շատ հարցեր քննարկելիս անհրաժեշտություն է առաջանում գտնել տվյալ $P(x)$ բազմանդամը $x-a$ երկանդամի վրա բաժանելիս ստացվող քանորդը: Այն, հիմնականում, իրականացվում էր «անկյունաձև բաժանման» կանոնով կամ խմբավորման եղանակով՝ դուրս բերելով $x-a$ բազմապատկիչը: Սակայն գոյություն ունի մեկ այլ՝ ոչ բարդ մեթոդ, որի կիրառմամբ հաշվումները զգալիորեն պարզեցվում են և գործնականում ավելի արագ կարելի է գտնել քանորդ բազմանդամը:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0, n\geq 1)$$

բազմանդամը $x-a$ երկանդամի վրա բաժանելու գործողությունը հարմար է կատարել, այսպես կոչված, ***Հոռների*** սխեմայով:

Կիրառենք անորոշ գործակիցների մեթոդը: Դիցուք՝ $P(x)$-ը $(x-a)$-ի բաժանելիս ստացվող քանորդը

$$Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0$$

բազմանդամն է (այն, ակնհայտորեն, $(n-1)$-րդ աստիճանի է), իսկ մնացորդը r թիվն է, այսինքն՝

$$P(x)=(x-a)Q(x)+r:$$

Տեղադրելով $P(x)$-ի և $Q(x)$-ի արժեքները՝ կստանանք հետևյալ նույնությունը՝

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=(x-a)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)+r:$$

Այդ հավասարության աջ մասը ներկայացնելով բազմանդամի ստանդարտ տեսքով, այնուհետև ձախ և աջ մասերի x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցների հավասարություններից կունենանք՝

$$a_n=b_{n-1},\quad a_{n-1}=b_{n-2}-ab_{n-1},\quad a_{n-2}=b_{n-3}-ab_{n-2}\ ,\ldots,\quad a_1=b_0-ab_1,\quad a_0=r-ab_0$$

որտեղից՝

$$b_{n-1}=a_n,\quad b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\ldots,\quad b_0=a_1+ab_1,\quad r=a_0+ab_0:$$

Ստացված հավասարությունները հնարավորություն են տալիս հերթականությամբ գտնելու $Q(x)$ քանորդի գործակիցները (հետևաբար նաև՝ $Q(x)$-ը) և r մնացորդը:

Հարմարության համար ստացված արդյունքները գրառում են ստորև բերված աղյուսակի տեսքով.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+ab_{n-2}$	$\cdots$	$b_0=a_1+ab_1$	$r=a_0+ab_0$

Այդ աղյուսակն անվանում են ***Հոռների սխեմա***:

Ուշադրություն դարձրե՛ք. աղյուսակի վերին տողում հերթականությամբ նշված են $P(x)$ բազմանդամի բոլոր $n+1$ գործակիցները: Ստորին տողի ձախ կողմում գրված առաջին թիվը a-ն է, այնուհետև հերթականությամբ ստացվում են $(n-1)$-րդ աստիճանի քանորդ բազմանդամի բոլոր n գործակիցները և վերջում՝ մնացորդը: Դրանց ստացման ալգորիթմը (օրինաչափությունը) պարզ երևում է աղյուսակի տեսքից:

Քանորդի ավագ գործակիցը հավասար է բաժանելիի ($P(x)$-ի) ավագ գործակցին: Եթե արդեն լրացված են երկրորդ տողի որոշ վանդակներ, ապա հաջորդ դատարկ վանդակը լրացվում է այսպես. a թիվը բազմապատկում են նախորդ վանդակում եղած թվով և գումարում առաջին տողի՝ այդ վանդակի վերևում գտնվող վանդակի թիվը:

Քանի որ Բեզուի թեորեմի համաձայն $r=P(a)$, ուստի Հոռների սխեման հնարավորություն է տալիս գտնելու նաև $P(x)$ բազմանդամի արժեքը $x=a$ կետում: Նշենք, որ շատ դեպքերում ավելի հարմար է այդ հաշվումը կատարել Հոռների սխեմայով, քան՝ $P(x)$ բազմանդամի մեջ $x=a$-ի անմիջական տեղադրումով:

Նշենք Հոռների սխեմայից բխող երկու օգտակար հետևանքներ:

1) Եթե $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ և a թվերն ամբողջ են, ապա $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ և r թվերը ևս ամբողջ են:

2) Եթե $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ և a թվերը ռացիոնալ են, ապա $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ և r թվերը նույնպես ռացիոնալ են:

Օրինակ 1: Հոռների սխեմայի օգնությամբ $5x^5-4x^4+8x^3+x-12$ բազմանդամը բաժանենք $(x-4)$-ի վրա:

Լուծում: Օգտվենք Հոռների սխեմայից.

	5	–4	8	0	1	–12
4	5	16	72	288	1153	4600

Այսպիսով,

$$5x^5-4x^4+8x^3+x-12=(x-4)(5x^4+16x^3+72x^2+288x+1153)+4600:$$

Ունեցանք նաև մնացորդը՝ $P(4)=4600$:

Օրինակ 2: x^n-1 բազմանդամը բաժանենք $(x-1)$-ի վրա:

Լուծում:

$n-1$ հատ զրոներ

	1	0	0	0	...	0	0	
1	1	1	1	1	...	1	1	0

Այսպիսով,

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1):$$

Մասնավորաբար, $n=3$ դեպքում կունենանք՝

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

իսկ $n=5$ դեպքում՝

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1):$$

Հարցեր

1. Հոռների սխեմայի օգնությամբ ինչպիսի՞ բազմանդամի բաժանելիս է իրականացվում մնացորդով բաժանումը:

Առաջադրանքներ

38. Օգտվելով Հոռների սխեմայից՝ $P(x)$ բազմանդամը բաժանել $Q(x)$ բազմանդամի.

ա) $P(x)=5x^3-11x^2+7x-9,\qquad Q(x)=x-1,$

բ) $P(x)=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1,\quad Q(x)=x+1,$

գ) $P(x)=x^9+1,\quad Q(x)=x+1,$

դ) $P(x)=x^{11}+x^{10}+\ldots+x^4+x^3+x^2+x+1,\qquad Q(x)=x^3-1,$

ե) $P(x)=x^n+1,\quad Q(x)=x+1:$

39. Օգտվելով Հոռների սխեմայից, գտնել

$$P(x)=6x^5-71x^4-90x^3-12x^2+7x-10$$

բազմանդամը $(x-13)$-ի վրա բաժանելուց ստացվող մնացորդը: Այդ մնացորդը գտեք նաև Բեզուի թեորեմի կիրառմամբ: Լուծման ո՞ր եղանակն է այս դեպքում նախընտրելի:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

4. ***Ցուցում:*** Տրված բազմանդամը նշանակենք՝ $P(x)$:

ա) Բազմանդամի բոլոր գործակիցների գումարը ստանալու համար բավական է x ի փոխարեն տեղադրել 1.

$$P(1)=\left(3\cdot 1^2-2\right)^{100}\cdot\left(1+1\right)^{10}=2^{10}=1024:$$

բ) Դժվար չէ համոզվել, որ որոնելի գումարը հավասար է՝

$$\frac{P(1)+P(-1)}{2}=\frac{1024+0}{2}=512:$$

գ) Որոնելի գումարը հավասար է՝

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=512:$$

Պատասխան՝ ա) 1024, բ) 512, գ) 512:

5. ***Ցուցում:*** Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ

$$P(0)=c,\quad P(-1)=a-b+c \text{ և } P(1)=a+b+c$$

թվերն ամբողջ են: Դրանցից էլ հետևում է, որ $a-b$ և $a+b$ թվերն ամբողջ են: Նշանակում է՝ $2a$-ն ամբողջ թիվ է: $P(x)$-ը ձևափոխենք այսպես.

$$P(x)=ax^2+bx+c=ax(x-1)+(a+b)x+c:$$

Ակնհայտ է, որ վերն ստացված արդյունքների հիման վրա, x-ի կամայական ամբողջ արժեքի դեպքում, այդ արտահայտությունն ամբողջ թիվ է, քանի որ

$$ax(x-1)=2a\frac{x(x-1)}{2}$$

թիվն ամբողջ է:

6. Կիրառելով «անկյունաձև» բաժանման կանոնը հեշտությամբ կարելի է գտնել $T(x)$ քանորդը և $R(x)$ մնացորդը:

ա) $T(x)=x^2,\qquad R(x)=-x-3:$

բ) $T(x)=2x^2-3,\qquad R(x)=x^2+3x:$

գ) $T(x)=x^5+1,\qquad R(x)=3:$

դ) $T(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1,\qquad R(x)=0:$

ե) $T(x)\equiv 0,\qquad R(x)=x^2-x+1:$

7. Դիցուք՝ $x^{100}-8x^{20}+7$ բազմանդամը x^2-1 բազմանդամի բաժանելիս ստացվում է $T(x)$ քանորդ և $R(x)$ մնացորդ.

$$x^{100}-8x^{20}+7=\left(x^2-1\right)\cdot T(x)+R(x):$$

Քանի որ $R(x)$-ի աստիճանը փոքր է 2-ից, ուստի այն կարող է ունենալ $ax+b$ տեսքը:

$$x^{100}-8x^{20}+7=\left(x^2-1\right)\cdot T(x)+ax+b$$

նույնության մեջ տեղադրելով՝ $x=-1$, այնուհետև՝ $x=1$, կստանանք հետևյալ հավասարությունները՝

$$-a+b=0 \text{ և } a+b=0,$$

որտեղից գտնում ենք՝ $a=b=0$: Հետևաբար $R(x)\equiv 0$: Նշանակում է՝

$$\left(x^{100}-8x^{20}+7\right)\vdots\left(x^2-1\right):$$

Պատասխան՝ այո:

8. Ունենք՝

$$x^{30}-x^{15}-x^{20}+x^5=\left(x^{30}-x^{20}\right)-\left(x^{15}-x^5\right)=$$

$$=x^{20}\left(x^{10}-1\right)-x^5\left(x^{10}-1\right)=x^5\left(x^{10}-1\right)\left(x^{15}-1\right)=$$

$$=x^5\left(x^5+1\right)\left(x^5-1\right)\left(x^{15}-1\right)=\left(x^5+1\right)Q(x),$$

որտեղ $Q(x)$-ը 25-րդ աստիճանի բազմանդամ է: Նշանակում է՝

$$\left(x^{30}-x^{15}-x^{20}+x^5\right)\vdots\left(x^5+1\right):$$

9. ***Ցուցում:*** Առաջին բազմանդամը ներկայացնել այսպես՝

$$x^{20}+x^{19}+1=\left(x^{20}+x^{19}+x^{18}\right)-\left(x^{18}-1\right)=$$

$$=x^{18}\left(x^2+x+1\right)-\left(x^6-1\right)\left(x^{12}+x^6+1\right):$$

Մյուս կողմից, $x^6-1=\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)$, իսկ $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$:

10. $m=1, n=-30$: ***Ցուցում:*** «Անկյունաձև» բաժանման արդյունքում մնացորդում կունենանք՝ $(m-1)x+n+30$: Որպեսզի այս արտահայտությունը նույնաբար հավասար լինի 0-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝ $m-1=0$ և $n+30=0$, որտեղից՝ $m=1$, $n=-30$:

11. ***Ցուցում:*** Պայմանի համաձայն՝ $n=3k$ $(k\in N)$: Հետևաբար,

$$x^n-1=x^{3k}-1=\left(x^3\right)^k-1:$$

Նշանակենք՝ $x^3=t$ և ցույց տանք, որ $\left(t^k-1\right)\vdots(t-1)$:

Դիցուք՝ t^k-1 բազմանդամը $t-1$-ի բաժանելիս քանորդում ստացվել է $Q(x)$ բազմանդամ, իսկ մնացորդում՝ r (մնացորդը 1-ից ցածր աստիճանի բազմանդամ է, այսինքն՝ հաստատուն է): Այդ դեպքում

$$t^k-1=(t-1)\cdot Q(t)+r$$

հավասարությունը նույնություն է, այսինքն՝ ճիշտ է t ի ցանկացած իրական արժեքի դեպքում: Մասնավորաբար, տեղադրելով $t=1$, կստանանք՝ $r=0$, որն էլ նշանակում է, որ $\left(t^k-1\right)\vdots(t-1)$, հետևաբար՝ $\left(x^{3k}-1\right)\vdots\left(x^3-1\right)$: Սակայն՝ $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$: Նշանակում է նաև՝ $\left(x^{3k}-1\right)\vdots\left(x^2+x+1\right)$:

12. $a=\dfrac{13}{3}$, $b=\dfrac{23}{3}$: Լուծում: Դիցուք՝

$$x^5+ax^4-3x^2+bx-10=\left(x^2+x-2\right)Q(x):$$

Այս նույնության մեջ հերթականությամբ տեղադրելով $x=1$ և $x=-2$ (դրանք x^2+x-2 եռանդամի արմատներն են), կունենանք հետևյալ պարզ համակարգը՝

$$\begin{cases} a+b=12, \\ 8a-b=27: \end{cases}$$

Այստեղից գտնում ենք՝ $a=\dfrac{13}{3}$, $b=\dfrac{23}{3}$:

13. 43: ***Ցուցում:*** Ըստ Բեզուի թեորեմի մնացորդը հավասար է՝ տրված բազմանդամի արժեքին՝ $x=-2$ դեպքում:

14. ***Ցուցում:*** Բավական է ապացուցել, որ կամայական n բնական թվի դեպքում $P(x)=x^n-a^n$ բազմանդամի արժեքը $x=a$ թվի դեպքում հավասար է 0-ի: Իրոք. $P(a)=a^n-a^n=0$:

15. ***Ցուցում:*** Ցույց տալ, որ երբ $x=-a$, ապա $x^{2k}-a^{2k}$ բազմանդամի արժեքը 0 է, որն էլ ակնհայտ է:

16. ***Ցուցում:*** Բավական է համոզվել, որ $x\neq a$ դեպքում $P(x)=x^{2k}+a^{2k}$ բազմանդամի արժեքները $x=a$ և $x=-a$ դեպքերում զրոյից տարբեր են

$$\left(P(a)=P(-a)=2a^{2k}\neq 0\right):$$

17. $a=-52$, $b=-67$: Ցուցում: Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ տրված բազմանդամի արժեքները $x=-1$ և $x=2$ դեպքերում, համապատասխանաբար, հավասար են 0 և 101: Այդ նկատառումով կստանանք a-ի և b-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի հավասարումների պարզ համակարգ:

20. ա) Այո՛, օրինակ, $x^6+x^4+1=0$ հավասարումը:

բ) Այո՛, օրինակ, $x^6-x^4-16x^2+16=0$ հավասարումը, որը հմարժեք է $\left(x^4-16\right)\left(x^2-1\right)=0$ հավասարումը, ունի ճիշտ չորս արմատ;

22. Օրինակներ. ա) $x^{20}+1$, բ) x^{20}, գ) $x^{20}-1$, դ) $x^{20-k}(x-1)(x-2)...(x-k+1)$:

23. Դիցուք՝ $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$:

Ենթադրենք, թե $a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0=0$, նշանակում է՝ $P(1)=0$, որն էլ ցույց է տալիս, որ $x=1$-ը $P(x)$ բազմանդամի արմատ է:

Հակադարձ պնդումը՝ դիցուք՝ $P(x)$ բազմանդամի համար $x=1$ թիվն արմատ է: Դա նշանակում է, որ $P(1)=0$, այսինքն՝

$$a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1=0:$$

25. ***Ցուցում:*** Որոնելի $P(x)$ բազմանդամն արտադրիչների վերածած տեսքով հետևյալն է՝ $4(x-2)(x+3)(x-5)$: Մնում է այն ներկայացնել բազմանդամի ստանդարտ տեսքով:

Այլ մոտեցում. կարելի է օգտվել Վիետի թեորեմի հակադարձ թեորեմից: Դիցուք՝ $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ բազմանդամը որոնելին է: Այդ դեպքում՝

$$a=4,\quad -\frac{b}{4}=2+(-3)+5,\quad \frac{c}{4}=2\cdot(-3)+2\cdot 5+(-3)\cdot 5,\quad -\frac{d}{4}=2\cdot(-3)\cdot 5,$$

որտեղից՝ $a=4,\ b=-16,\ \ c=-44,\ \ d=120$:

Հետևաբար, $P(x)=4x^3-16x^2-44x+120$:

26. ***Ցուցում:*** Դիցուք՝ $x^2+px+q=0$ հավասարումը որոնելին է: Ըստ Վիետի թեորեմի՝

$$-p=x_1^2+x_2^2 \text{ և } q=x_1^2x_2^2:$$

Ունենք՝

$$q=(x_1x_2)^2=(-1)^2=1,\quad -p=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5^2-2\cdot(-1)=27,$$

քանի որ խնդրի պայմանից, ըստ Վիետի թեորեմի՝

$$x_1+x_2=5 \text{ և } x_1x_2=-1:$$

Հետևաբար, որոնելի քառակուսային հավասարումն է՝

$$x^2-27x+1=0:$$

27. $x^3-14x^2+49x-36$: Լուծում: Դիցուք՝ $x_1,\ \ x_2,\ \ x_3$ թվերը տրված բազմանդամի արմատներն են: Ըստ Վիետի թեորեմի՝

$$x_1+x_2+x_3=6,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=11,\quad x_1x_2x_3=6:$$

Մեզ անհրաժեշտ է փնտրել

$$x^3+bx^2+cx+d$$

տեսքի այնպիսի բազմանդամ, որի համար $x_1^2,\ \ x_2^2,\ \ x_3^2$ թվերը լինեն արմատներ: Դրա համար անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենան հետևյալ հավասարությունները.

$$-b=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad c=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2,\quad -d=x_1^2x_2^2x_3^2:$$

Քանի որ

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)=6^2-2\cdot 11=14,$$

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)^2-2x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)=11^2-2\cdot 6\cdot 6=49,$$

$$x_1^2x_2^2x_3^2=\left(x_1x_2x_3\right)^2=6^2=36,$$

ուստի որոնելի բազմանդամը հետևյալն է՝

$$x^3-14x^2+49x-36:$$

28. p^2-2q: ***Ցուցում:***

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=(-p)^2-2q=p^2-2q:$$

29. ***Ցուցում:*** Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ a, b, c թվերը $x^3+px+q=0$ հավասարման արմատներն են: Վիետի թեորեմի համաձայն՝ $a+b+c=0$, քանի որ հավասարման մեջ x^2 պարունակող՝ երկրորդ գումարելիի գործակիցը 0 է:

31. ***Ցուցում:*** Եթե x_1, x_2, x_3 թվերն այդ հավասարման արմատներն են, ապա ըստ Վիետի թեորեմի՝

$$x_1x_2x_3=-c:$$

Մյուս կողմից, քանի որ այդ թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա, ապա ըստ հայտնի հատկության $x_1x_3=x_2^2$: Նշանակում է՝ $x_2^3=-c$, որտեղից էլ ստանում ենք՝ $x_2=-\sqrt[3]{c}$, այսինքն՝ արմատներից մեկը հավասար է $-\sqrt[3]{c}$:

32. $m=47$: ***Ցուցում:*** Պայմանից հետևում է, որ x_1, x_2, x_3 $(x_1\le x_2\le x_3)$ թվերը տրված հավասարման արմատներն են, ապա $x_1^2+x_2^2=x_3^2$: Այն ներկայացնենք այսպես՝

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_3^2: \qquad (1)$$

Մյուս կողմից, ըստ Վիետի թեորեմի՝ $x_1+x_2=12-x_3$ և $x_1x_2=\frac{60}{x_3}$:

Այդ նկատառումներով (1) հավասարությունը կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$(12-x_3)^2-\frac{120}{x_3}=x_3^2,$$

որն էլ բերվում է x_3-ի նկատմամբ քառակուսային հավասարման՝

$$x_3^2-6x_3+5=0:$$

Այդ հավասարումից կունենանք՝ $x_3=1$ կամ $x_3=5$: Ակնհայտ է, որ x_3-ը չի կարող լինել 1, քանի որ x_3-ն ամենամեծ արմատն է և $x_1+x_2+x_3=12$: Այսպիսով, $x_3=5$: Տեղադրելով այն տրված հավասարման մեջ, կգտնենք m-ի որոնելի արժեքը՝ $m=47$:

33. Դիցուք՝ $x_1=\alpha$, $x_2=\alpha q$ և $x_3=\alpha q^2$ թվերը տրված հավասարման արմատներն են: Վիետի թեորեմի համաձայն՝

$$\alpha+\alpha q+\alpha q^2=-a,\ \ \alpha^2q+\alpha^2q^2+\alpha^2q^3=b,\ \ \alpha^3q^3=-c:$$

Երկրորդ հավասարությունը ներկայացնելով

$$\alpha q\left(\alpha+\alpha q+\alpha q^2\right)=b$$

տեսքով, այնուհետև հաշվի առնելով մյուս երկու հավասարությունները, կարող ենք գրել՝

$$-\sqrt[3]{c}\cdot(-a)=b, \text{ այլ կերպ՝ } \sqrt[3]{c}\cdot a=b:$$

Ստացված հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով խորանարդ, կունենանք՝

$$a^3c=b^3,$$

որն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

34. ա) $(x-1)\cdot\left(x^2-4x-6\right)$: բ) $(x+1)(x+2)(2x-1)$:

գ) $(x-1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$: դ) $(x-1)(x+1)^3$:

ե) $(x-1)(x+4)\left(x^2-4x+5\right)$: զ) $(x+1)(2x-1)\left(x^2-4x+1\right)$:

35. ա) 1: ***Ցուցում:*** Ամբողջ արմատները պետք է փնտրել 5-ի՝ ամբողջ թվով արտահայտված բաժանարարների մեջ: բ) –3; 2: Ցուցում: Ամբողջ արմատները կարող են լինել միայն ±1, ±2, ±3, ±6 թվերի մեջ: գ) 1: Ցուցում: Ազատ անդամի՝ –1-ի ±1 բաժանարարներից միայն մեկն է բավարարում տվյալ հավասարմանը: դ) 2:

36. ա) –3: ***Ցուցում:*** Քանի որ հավասարման ձախ մասի բազմանդամի առաջին գործակիցը 1 է, ուստի այդ բազմանդամի ռացիոնալ արմատները պետք է փնտրել ազատ անդամի՝ –9-ի՝ ±1, ±3, ±9 բաժանարարների մեջ: Տեղադրությամբ համոզվում ենք, որ միայն 3 թիվն է բավարարում տրված հավասարմանը:

բ) $\frac{1}{2}$: ***Ցուցում:*** Տրված հավասարման $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ արմատներն անհրաժեշտ է փնտրել ±1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$ թվերի մեջ ($\frac{p}{q}$ տեսքի թվերի մեջ, որտեղ p-ն ազատ անդամի բաժանարար է, իսկ q-ն՝ ավագ անդամի գործակցի բաժանարար):

գ) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$: ***Ցուցում:*** Ռացիոնալ արմատները կարող են լինել միայն ±1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$ թվերից:

դ) 3; $\frac{1}{2}$: ***Ցուցում:*** Ռացիոնալ արմատներն անհրաժեշտ է փնտրել ±1, ±2, ±3, ±6, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ թվերի մեջ:

37. ա) 2; $\frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$: ***Ցուցում:*** Նկատելով, որ $x=2$-ն արմատ է, այնուհետև տրված բազմանդամը բաժանել $(x-2)$-ի և գտնել քանորդում առաջացած քառակուսային եռանդամի արմատները:

բ) $-1;\ \frac{2}{3};\ 2$: ***Ցուցում:*** Ռացիոնալ արմատները գտնելու կանոնի կիրառմամբ սկզբում գտնել ռացիոնալ արմատները: Դրանք են՝ $-1;\ \frac{2}{3}$ և 2: Այնուհետև $P(x)$ բազմանդամը բաժանել $(x+1)(3x-2)(x-2)=3x^2-5x^2-4x+4$ բազմանդամի վրա: Արդյունքում քանորդում ստացվում է $Q(x)=x^3-3x^2+4$ բազմանդամը, որի արմատներն էլ –1 և 2 թվերն են, քանի որ

$$Q(x)=(x+1)(x-2)^2\ :$$

Այսպիսով, տրված բազմանդամն ունի ճիշտ երեք արմատ՝ $-1;\ \frac{2}{3}$ և 2, որոնցից –1–ը և 2–ը կրկնակի (2 պատիկ) արմատներ են: