Թեմա 1.8. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

1. Առնչություն: Ձեզանից յուրաքանչյուրը ամեն օր գնում է դպրոց, մտնում է դասասենյակ, նստում է իր նստարանին, մասնակցում է դասերին: Բոլոր այս իրադրություններում՝ գնալով, մտնելով, մասնակցելով, դուք փոխհարաբերության մեջ եք մտնում ինչ-որ առարկաների հետ: Դուք կարող եք փոխհարաբերության մեջ մտնել մարդկանց հետ. հանդիպել ձեր ընկերոջը, լսել ուսուցչին, սիրել որևէ մեկին: Իրար հետ կարող են փոխհարաբերության մեջ մտնել առարկաները. գիրքը կարող է լինել գրասեղանի վրա, ծաղիկը դրված լինել ծաղկամանի մեջ, խնձորը կախված լինել ծառից: Բոլոր այս իրադրությունները հանրահաշվի լեզվով նկարագրելիս նրանցում մասնակցող առարկաների կամ տարրերի փոխհարաբերությունը նշելու համար մենք կօգտագործենք «առնչվել» բայը: Մենք կասենք. աշակերտը առնչվում է ուսուցչի հետ, գիրքը առնչվում է գրասեղանի հետ, խնձորը առնչվում է ծառի հետ:

Բերենք «առնչվել» բայի գործածության ևս մի քանի օրինակ:

ա. Յուրաքանչյուր աշակերտ առնչվում է իր դասագրքի հետ, երբ սովորում է դասը:

բ. Յուրաքանչյուր աշակերտ առնչվում է իր դպրոցի հետ:

գ. Յուրաքանչյուր աշակերտ առնչվում է իր ուսուցչի հետ:

դ. Յուրաքանչյուր մարդ առնչվում է մի բնական թվի հետ, որը ցույց է տալիս այդ մարդու ծննդյան տարեթիվը:

ե. Յուրաքանչյուր մարդու տարիքը ցույց տվող թիվը առնչվում է այդ մարդու հետ:

զ. Յուրաքանչյուր մեծություն առնչվում է մի իրական թվի՝ իր թվային արժեքի հետ:

է. Քաղաքի յուրաքանչյուր փողոց առնչվում է տվյալ քաղաքի հետ:

Իրար հետ առնչվում են նաև մեծությունները՝ մեծությունների համեմատման ընթացքում: Մեծությունների համեմատման ընթացքը մենք անվանել ենք համեմատականություն: Տարրերի առնչման ընթացքը անվանենք ***առնչություն***: Այսպիսով՝ առնչութուն է, մասնավորապես, յուրաքանչյուր համեմատականությունը:

Դիտարկենք հետևյալ երկու առնչությունները:

ա. Յուրաքանչյուր մարդու առնչությունը իր ծննդյան տարեթվի հետ:

բ. Յուրաքանչյուր տարեթվի առնչությունը այն մարդու հետ, որը ծնվել է այդ տարեթվին:

Թեպետ և այս առնչություններն ունեն արտաքին նմանություն, բայց նրանց մեջ կա մի սկզբունքային տարբերություն: Ո՞րն է այն:

Քննարկենք ա առնչությունը: Դիցուք՝ *a* մարդը ծնվել է *b* թվականին: Այս *a* մարդը առնչվում է *b* տարեթվի հետ և այլ տարեթվի հետ նույն իմաստով չի կարող առնչվել, քանի որ յուրաքանչյուր մարդ ծնվում է միայն մեկ անգամ:

Քննարկենք երկրորդ առնչությունը: Դիցուք՝ *b* թվականին ծնվել է *a* մարդը: Այս *b* տարեթիվը առնչվում է *a* մարդու հետ: Բայց նույն *b* տարեթվին կարող է ծնված լինել նաև մի այլ՝ *c* մարդ, և *b*-ն կառնչվի նաև այդ *c* մարդու հետ: Օրինակ՝ 1869 թվականը առնչվում է և՛ Կոմիտասի հետ, և՛ Հովհաննես Թումանյանի հետ, որովհետև երկուսն էլ ծնվել են այդ թվականին:

2. Ֆունկցիա: Ավելի կարևոր են այն առնչությունները, որոնցում դիտարկվող յուրաքանչյուր տարր առնչվում է միայն մեկ տարրի հետ: Այդպիսի առնչությունները անվանվում են ***ֆունկցիաներ***:

Բերենք ֆունկցիաների մի շարք օրինակներ և ժխտօրինակներ:

ա. Դիցուք՝ յուրաքանչյուր փողոց առնչվում է այն քաղաքի հետ, որում գտնվում է: Քանի որ յուրաքանչյուր փողոց գտնվում է միայն մեկ քաղաքում, ապա ստացված առնչությունը ֆունկցիա է: Դիցուք՝ յուրաքանչյուր քաղաք առնչվում է այդ քաղաքի փողոցի հետ: Ստացված առնչությունը ֆունկցիա չէ, որովհետև միևնույն քաղաքը կունենա շատ փողոցներ և կառնչվի մեկից ավելի փողոցների հետ:

բ. Յուրաքանչյուր մարդ առնչվում է երկարության քանակության հետ, երբ նշվում է նրա հասակը: Քանի որ մարդու հասակը տվյալ պահին մեկն է, ապա յուրաքանչյուր մարդ առնչվում է երկարության մեկ քանակության հետ: Հետևաբար՝ առնչությունը ֆունկցիա է:

գ. Յուրաքանչյուր մարդ առնչվում է զանգվածի քանակության հետ, երբ նշվում է նրա քաշը: Քանի որ մարդու քաշը տվյալ պահին մեկն է, ապա յուրաքանչյուր մարդ առնչվում է զանգվածի մեկ քանակության հետ: Հետևաբար՝ առնչությունը ֆունկցիա է:

դ. Յուրաքանչյուր աշակերտ առնչվում է որևէ թվանշանի հետ՝ ինչ-որ առարկայից տարեկան գնահատականներ ստանալիս: Առնչությունը ֆունկցիա է: Իսկ երբ նշվում է տվյալ առարկայի առաջադիմությունը, ապա յուրաքանչյուր գնահատական առնչվում է որևէ աշակերտի հետ: Միևնույն գնահատականը կարող են ունենալ տարբեր աշակերտներ: Հետևաբար՝ միևնույն գնահատականը կարող է առնչվել մեկից ավելի աշակերտների հետ: Ուրեմն՝ առնչությունը ֆունկցիա չէ:

ե. Յուրաքանչյուր մարդ առնչվում է ինչ-որ քաղաքի հետ, երբ նշվում է այն քաղաքը, որտեղ երբևէ եղել է տվյալ մարդը: Առնչությունը ֆունկցիա չէ, որովհետև կան մարդիկ, որոնք եղել են բազմաթիվ քաղաքներում:

զ. Դահլիճի յուրաքանչյուր հանդիսական առնչվում է մի նստատեղի հետ, երբ դիտարկվում է դահլիճի զբաղվածությունը ինչ-որ միջոցառման ընթացքում: Առնչությունը ֆունկցիա է:

է. Երբ ասում ենք, թե կինոդահլիճում նստած յուրաքանչյուր հանդիսական պետք է լավ տեսնի էկրանը, առնչում ենք կինոդահլիճը յուրաքանչյուր հանդիսականի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա չէ: Կինոդահլիճի յուրաքանչյուր նստատեղ առնչում են մուտքի մեկ տոմսի հետ՝ որևէ ֆիլմի ցուցադրումից առաջ: Այդ առնչությունը ֆունկցիա է:

ը. Յուրաքանչյուր սենյակ առնչվում է մակերեսի քանակության հետ, երբ որոշվում է տվյալ սենյակի տարածքը: Առնչությունը ֆունկցիա է:

թ. Յուրաքանչյուր ճանապարհ առնչվում է երկարության քանակության հետ, երբ նշվում է ճանապարհի երկարությունը: Առնչությունը ֆունկցիա է:

ժ. Յուրաքանչյուր ապրանք առնչվում է դրամի քանակության հետ, երբ որոշվում է նրա արժեքը: Առնչությունը ֆունկցիա է:

ի. Յուրաքանչյուր արկղ առնչվում է ծավալի քանակության հետ, երբ որոշվում է նրա տարողությունը: Առնչությունը ֆունկցիա է:

լ. Յուրաքանչյուր երկիր առնչվում է իր հարևան երկրի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա չէ:

Դիտարկենք մի քանի թվային օրինակներ և ժխտօրինակներ:

ա. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է, որովհետև այդ կերպ յուրաքանչյուր թիվ առնչվում է միայն մեկ թվի հետ:

բ. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր $-x$ հակադիրի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է, որովհետև թվի հակադիրը միակն է:

գ. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր $1/x$ հակադարձի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է:

դ. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր $|x|$ մոդուլի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է:

ե. Յուրաքանչյուր x իրական թվի $|x|$ մոդուլը առնչենք այդ x թվի հետ: 2 թիվը, օրինակ, 2 և -2 թվերի մոդուլն է: Հետևաբար՝ 2 -ը միաժամանակ առնչվում է 2 և -2 թվերի հետ: Այսինքն՝ 2 -ը միաժամանակ առնչվում է մեկից ավելի թվերի հետ: Ուրեմն՝ առնչությունը ֆունկցիա չէ:

զ. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր քառակուսու հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է:

է. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր խորանարդի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է:

ը. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր քառակուսի արմատի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է: Իսկ եթե յուրաքանչյուր թիվ առնչենք այն թվի հետ, որի քառակուսին հավասար է տրված թվին, ապա այդ առնչությունը ֆունկցիա չէ:

թ. Յուրաքանչյուր x իրական թիվ առնչենք իր խորանարդ արմատի հետ: Առնչությունը ֆունկցիա է:

3. Ֆունկցիայի գրառումը: Յուրաքանչյուր ֆունկցիա հանրահաշվի ուսումնասիրության առարկա է, և նրա նշանակման համար, հանրահաշվում ընդունված սովորությամբ, կարելի է գործածել որևէ տառ կամ նշան: Սովորաբար, ֆունկցիաները նշանակելու համար գործածվում են լատինական կամ հունական այբուբենների միջին տառերը՝ ϕ, φ, f, g,...

Գոյություն ունեն, սակայն, ֆունկցիայի գրառման այնպիսի ձևեր, որոնք ավելի շատ տեղեկություններ են պարունակում տվյալ ֆունկցիայի մասին, քան նրա անվանումն է կամ որևէ տառով կամ նշանի միջոցով գրառումը:

Համեմատականությունները գրառելիս, օրինակ, մենք օգտագործեցինք սլաքները: Նման գործածության առավելությունը ակներև է. $a \to b$ նշանակումը ցույց է տալիս նաև համեմատականության համեմատական անդամները: Մինչդեռ համեմատականության որևէ տառով նշանակումը նման տեղեկություն չի պարունակում: Իհարկե՝ հասկանալի է, որ համեմատական անդամների միջոցով համեմատականությունը տալու համար մենք պետք է ունենանք նրա բոլոր համեմատական անդամները: Ասվածը կիրառվում է նաև ֆունկցիաների նշանակման դեպքում:

Օրինակներ:

ա. Դիցուք՝ f ֆունկցիան $1, -2, 3, -4$ թվերից յուրաքանչյուրը առնչում է իր նշանի՝ + կամ – տարրի հետ: Այդ ֆունկցիան կարելի է տալ $\{1, -2, 3, -4\}$ և $\{+, -\}$ բազմությունների տարրերի հետևյալ առնչությամբ.

$$1 \to +,\ -2 \to -,\ 3 \to +,\ -4 \to -:$$

բ. Դիցուք՝ g ֆունկցիան $1, 2, 3, 4$ թվերից յուրաքանչյուրը առնչում է իր զույգության հետ: Այդ ֆունկցիան կարելի է տալ $\{1, 2, 3, 4\}$ և {զույգ, կենտ} բազմությունների տարրերի հետևյալ առնչությամբ.

$1 \to$ կենտ, $2 \to$ զույգ, $3 \to$ կենտ, $4 \to$ զույգ:

գ. Յուրաքանչյուր աշխարհամաս առնչենք նրա տարածքի հետ: Այդ առնչությունը ֆունկցիա է, որի մեջ առնչվող տարրերն են.

Եվրոպա $\to 10{,}2$ մլն. քառ. կմ,

Ասիա $\to 44{,}4$ մլն. քառ. կմ,

Ամերիկա $\to 42{,}1$ մլն. քառ. կմ,

Աֆրիկա $\to 29{,}9$ մլն. քառ. կմ,

Ավստրալիա $\to 8{,}9$ մլն. քառ. կմ:

Անտարկտիդա $\to 13{,}9$ մլն. քառ. կմ:

Տառերով նշանակված ֆունկցիաների համար նույնպես մենք կարող ենք պատկերել առնչվող տարրերը: Եթե ունենք f ֆունկցիան, ապա այն տարրը, որի հետ առնչվում է x տարրը, կգրառենք $f(x)$ տեսքով: Այստեղ $f(x)$ ամենևին չի նշանակում f-ի և x-ի արտադրյալը. f-ը և x-ը իրար հետ հնարավոր էլ չէ բազմապատկել: Ուղղակի՝ $f(x)$ նշանով գրառվում է f ֆունկցիայի ընթացքում x տարրի հետ առնչվող միակ տարրը: Այստեղ x-ը և $f(x)$-ը առնչվող տարրերն են: Այսինքն՝ $x \to f(x)$: Այսպիսով՝ եթե f ֆունկցիայի ընթացքում x տարրի հետ առնչվող միակ տարրը նշանակենք y-ով, ապա կունենանք

$$y = f(x)$$

հավասարումը:

Օրինակներ.

ա. Նշանակենք $f(x)$-ով x մարդու տարիքը: Այստեղ f-ը ֆունկցիան է, որը առնչում է յուրաքանչյուր x մարդուն նրա $f(x)$ տարիքի հետ: Եթե, ասենք, Հայկը 5 տարեկան է, ապա մենք կգործածենք ձեզ համար անսովոր մի հավասարություն՝

$$f \text{ (Հայկ)} = 5 \text{ տարի:}$$

Հասկանու՞մ եք, որ « f (Հայկ) = 5 տարի» հավասարությունը «Հայկը 5 տարեկան է» նախադասության մի այլ գրառումն է:

բ. Նշանակենք $g(x)$ -ով x մարդու հասակը: Այստեղ g -ն ֆունկցիան է, որը առնչում է յուրաքանչյուր x մարդուն նրա $g(x)$ հասակի հետ: Եթե, ասենք, Տիրայրի հասակը 150 սմ է, ապա մենք ստանում ենք ձեզ համար անսովոր մի այլ հավասարություն՝

$$g \text{ (Տիրայր)} = 150 \text{ սմ :}$$

Այս հավասարությունն էլ «Տիրայրի հասակը 150 սմ է» նախադասության մի այլ գրառումն է:

գ. Նշանակենք $h(x)$ -ով x պետության տարածքը 1999 թվականին: Այդ դեպքում h -ը ֆունկցիա է, և առնչվող տարրերը կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունների միջոցով.

h (Հայաստանի Հանրապետություն) = 29740 քառ. կմ,

h (Ռուսաստան) = 17 075 400 քառ. կմ,

h (Ֆրանսիա) = 551 600 600 քառ. կմ,

h (ԱՄՆ) = 9 363 200 քառ. կմ,

h (Չինաստան) = 9 597 000 քառ. կմ,

h (Գերմանիա) = 379 200 քառ. կմ:

դ. Այժմ $j(x)$ -ով նշանակենք x երկրի մայրաքաղաքը 2008 թվականին: Այդ դեպքում j -ն ֆունկցիա է, որի առնչվող տարրերը կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունների միջոցով.

j (Հայաստանի Հանրապետություն) = Երևան,

j (Ռուսաստան) = Մոսկվա,

j (Ֆրանսիա) = Փարիզ,

j (ԱՄՆ) = Վաշինգտոն,

j (Չինաստան) = Պեկին,

j (Գերմանիա) = Բեռլին:

Եթե տրված է f ֆունկցիան, ապա $y = f(x)$ բանաձևը կարելի է դիտել որպես հավասարում: Այդ դեպքում x -ը և y -ը կդիտվեն որպես փոփոխականներ: x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքի համար

$y = f(x)$ հավասարումը թույլ է տալիս գտնելու y փոփոխականի ճիշտ մեկ արժեք: Սա նկատի ունենալով՝ x փոփոխականը երբեմն անվանում ենք ***անկախ*** փոփոխական, իսկ y -ը՝ ***կախյալ*** փոփոխական: Անկախ փոփոխականը երբեմն անվանվում է նաև ֆունկցիայի ***արգումենտ***, իսկ կախյալ փոփոխականը՝ ***ֆունկցիա***: Կախյալ փոփոխականի ընդունած արժեքները կոչվում են նաև ***ֆունկցիայի արժեքներ***: