Թեմա 1.6. ԲՆԱԿԱՆ ՑՈՒՑԻՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ

1. Աստիճան: Երբեմն անհրաժեշտ է լինում միևնույն թիվը կամ արտահայտությունը մի քանի անգամ բազմապատկել ինքն իրենով: Նման եղանակով կազմված արտադրյալը կոչվում է ***աստիճան***, կրկնվող բազմապատկիչը կոչվում է ***աստիճանի հիմք***, իսկ բազմապատկիչների թիվը՝ ***աստիճանացույց*** կամ ***ցուցիչ:***

Բնական ցուցիչով աստիճանի սահմանումը

a արտահայտության n $(n>1)$ բնական ցուցիչով աստիճան է կոչվում այն արտահայտությունը, որն ստացվում է a-ն ինքն իրենով n անգամ բազմապատկելուց: a արտահայտության 1 ցուցիչով աստիճան է կոչվում a արտահայտությունը:

a արտահայտության n բնական ցուցիչով աստիճանը գրառվում է այսպես a^n: Այն կարդացվում է՝ a -ն բարձրացրած n աստիճան կամ՝ a -ի n աստիճան: Այսպիսով՝

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ անգամ}}:$$

Այստեղ a^n արտահայտությունը աստիճանն է, a -ն՝ նրա հիմքը, n -ը՝ աստիճանացույցը կամ ցուցիչը: Տրված հիմքի և աստիճանացույցի միջոցով աստիճանը ստանալու գործողությունը հաճախ անվանելու ենք նաև աստիճան բարձրացնելու գործողություն: a -ի 2 աստիճանը անվանելու ենք նրա ***քառակուսի,*** կամ a ***քառակուսի***, իսկ a -ի 3 աստիճանը՝ a ***խորանարդ***:

Բերենք մի քանի օրինակ.

$$a^1 = a,\ x^3 = xxx,\ 10^2 = 10 \cdot 10,\ \ 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2:$$

Այստեղ մենք ունենք աստիճանի չորս օրինակ: Նրանց ցուցիչներն են. առաջինինը՝ 1, երկրորդինը՝ 3, երրորդինը՝ 2, չորրորդինը՝ 5: Առաջին աստիճանի հիմքը a է, երրորդինը՝ 10 է, չորրորդինը՝ 2: Նկատենք, որ 1 աստիճանացույցը, սովորաբար, չի գրառվում (արժե հիշել, որ 1 գործակիցը նույնպես չի գրառվում):

Շատ հեշտ է աստիճան բարձրացնել 0 -ն և 1-ը. կամայական n բնական թվի համար՝

$$1^n = 1,\ 0^n = 0:$$

Կարևոր է ճիշտ գրառել ու կարդալ աստիճան պարունակող արտահայտությունները: Բերենք մի քանի օրինակ.

ա. $x+y^2$, x -ի և y քառակուսու գումարը, x պլյուս՝ y քառակուսի, բ. $x+y^2$, x -ի և y -ի գումարի քառակուսին, x պլյուս y քառակուսի,

գ. x^2+y^2, x քառակուսու և y քառակուսու գումարը, x քառակուսի պլյուս y քառակուսի:

Ինչ հերթականությամբ պետք է կատարել գործողությունները, երբ նրանց մեջ կա նաև աստիճան բարձրացնելու գործողությունը: Այս հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ կանոնը:

Կանոն աստիճան բարձրացնելու կարգի մասին

Աստիճան բարձրացնելու գործողությունը ավելի բարձր կարգի գործողություն է, քան գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման գործողությունները, և արտահայտության մեջ փակագծերի բացակայության դեպքում նախ պետք է կատարել աստիճան բարձրացնելու գործողությունը:

Օրինակներ.

$$2+3^2=2+(3\cdot3)=11,\ 3\cdot4^2=3\cdot(4^2)=48,\ 54:3^3=54:(3^3)=2:$$

2. Աստիճանների հավասարությունը: Հավասարության հետ աստիճանի կապը դիտարկելիս ամենաբնական հարցը, որ առաջանում է, այն է, թե արդյո՞ք իրար հավասար են հավասար հիմքեր և հավասար ցուցիչներ ունեցող աստիճանները: Այս հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ օրենքը:

Աստիճանների հավասարության օրենքը

Հավասար հիմքով և միևնույն ցուցիչներով աստիճանները հավասար են: Այսինքն՝ կամայական x և y արտահայտությունների և m, n բնական թվերի համար եթե $x = y$, $m = n$, ապա $x^m = y^n$:

Այս օրենքից մասնավորապես հետևում է, որ միևնույն հիմքով և հավասար ցուցիչներով աստիճանները, ինչպես նաև հավասար հիմքերով և միևնույն ցուցիչով աստիճանները իրար հավասար են: Այսինքն՝ կամայական x y արտահայտությունների և m, n բնական թվի համար.

ա. եթե $m = n$, ապա $x^m = x^n$, բ. եթե $x = y$, ապա $x^n = y^n$:

Այսպիսով՝ հիմքերի հավասարության և, միաժամանակ, ցուցիչների հավասարության դեպքում մենք կարող ենք պնդել աստիճանների հավասարությունը: Իսկ եթե իրար հավասար են երկու աստիճաններ և նրանց հիմքերը, կարելի՞ է այս դեպքում էլ պնդել ցուցիչների հավասարությունը: 0, 1, -1 հիմքերն ունեցող աստիճանները անմիջապես հերքում են այս դրույթի ճշմարտացիությունը: Օրինակ՝ 1 -ի ցանկացած երկու աստիճաններ իրար հավասար են, իսկ այդ աստիճանների աստիճանացույցերը կարելի է վերցնել իրարից տարբեր: Պարզվում է, որ այս երեք դեպքերը իսկապես բացառիկ են. մնացած դեպքերում մեր դրույթը ճշմարիտ է:

Նախ դիտարկենք միևնույն հիմքն ունեցող հավասար աստիճանները:

Ցուցիչների հավասարության օրենքը

0, 1, –1 թվերից տարբեր և միևնույն հիմքը ունեցող հավասար աստիճանների ցուցիչները հավասար են: Այսինքն՝ 0, 1, –1 թվերից տարբեր x արտահատության և կամայական m, n բնական թվերի համար՝ եթե $x^m = x^n$, ապա $m = n$

Այժմ դիտարկենք հավասար հիմքեր ունեցող հավասար աստիճանների դեպքը:

Ցուցիչների հավասարության հատկությունը

0, 1, –1 թվերից տարբեր և հավասար հիմքեր ունեցող հավասար աստիճանների ցուցիչները հավասար են: Այսինքն՝ 0, 1, –1 թվերից տարբեր x, y արտահայտությունների և կամայական m, n բնական թվերի համար՝ եթե $x = y$ և $x^m = y^n$, ապա $m = n$:

Ապացուցումը	Փաստարկները
x, y	0, 1, −1 թվերից տարբեր արտահայտություններ
m, n	բնական թվեր
$x = y, \quad x^m = y^n$	պայմանները
$x^m = y^m$	աստիճանների հավասարության օրենքը
$y^n = y^m$	հավասարության փոխանցական օրենքը
$m = n$	ցուցիչների հավասարության օրենքը

Հավասար ցուցիչներ ունեցող հավասար աստիճանների հիմքերը «պարտավոր» չեն իրար հավասար լինել: Իսկապես, 2^2 և $(-2)^2$ աստիճաններից յուրաքանչյուրը հավասար է 4 -ի: Հավասար են նաև նրանց ցուցիչները. երկուսն էլ 2 են: Սակայն այդ աստիճանների հիմքերը հավասար չեն:

3. Քառակուսու մակերեսը և խորանարդի ծավալը: Կամայական a արտահայտության երկրորդ աստիճանը՝ a^2 արտահայտությունը, մենք անվանեցինք a -ի քառակուսի: Բայց քառակուսին մեզ հայտնի է որպես հավասար կողմեր ունեցող ուղղանկյուն: Ինչո՞ւ նույն կերպ անվանեցինք նաև արտահայտության երկրորդ աստիճանը:

Վերցնենք a երկարություն և b լայնություն ունեցող ուղղանկյունը: Նրա S մակերեսը կորոշվի $S = ab$ բանաձևով: Քանի որ a կողմ ունեցող քառակուսին a երկարությամբ և a լայնությամբ ուղղանկյուն է, ապա նրա S մակերեսը որոշվում է $S = a \cdot a$ բանաձևով: Այժմ, հաշվի առնելով $aa = a^2$ նշանակումը և օգտվելով հավասարության փոխանցական օրենքից, կստանանք քառակուսու մակերեսի բանաձևը՝

$$S = a^2 :$$

Ահա և արտահայտության երկրորդ աստիճանը քառակուսի անվանելու պատճառը: Իսկ ինչո՞ւ ենք արտահայտության երրորդ աստիճանն անվանում նրա խորանարդ:

Դիտարկենք a կող ունեցող խորանարդը: Ինչպե՞ս որոշենք նրա ծավալը: Մենք գիտենք, որ a երկարություն, b լայնություն և c բարձրություն ունեցող ուղղանկյունանիստի V ծավալը որոշվում է $V = abc$ բանաձևով: Բայց a կող ունեցող խորանարդը ուղղանկյունանիստ է, որի թե՛ երկարությունը, թե՛ լայնու-թյունը և թե՛ բարձրությունը հավասար են a -ի: Հետևաբար՝ նրա V ծավալը մենք կորոշենք $V = aaa$ բանաձևով: Այս բանաձևից, հաշվի առնելով $aaa = a^3$ նշանակումը և հավասարության փոխանցական օրենքը, կստանանք

$$V = a^3 :$$

Ստացված հավասարությունը խորանարդի ծավալի բանաձևն է: Այն միաժամանակ պատասխանում է մեր այն հարցին, թե ինչու են արտահայտության երրորդ աստիճանն անվանում նրա խորանարդ:

4. Աստիճանային աճ: Տասնիններորդ դարի կեսերին Ավստրալիայի նորաբնակները Անգլիայից իրենց հետ բերեցին նաև մի քանի ճագար: Նոր պայմանները այնքան բարենպաստ եղան ճագարների համար, որ սրանք սկսեցին շատ արագ բազմանալ: Շուտով նրանց թիվը այնքան աճեց, որ ճագարների բազմացումը կառավարելի դարձնելու համար տեղի կառավարությունը ստիպված եղավ ընդունել մի հատուկ օրենք:

Այժմ տեսնենք, թե 8 ճագարը բազմանալով ինչքա՞ն կդառնա, ասենք, 10 տարուց հետո, եթե հայտնի է, որ յուրաքանչյուր վեց ամիսը մեկ նրանց թիվը կրկնապատկվում է:

Քանի որ ճագարները վեց ամսում կրկնապատկվում են, ապա մեկ տարում նրանք կկրկնապատկվեն երկու անգամ, իսկ տասը տարում՝ քան անգամ: Հետևաբար, տասը տարուց հետո ճագարների թիվը կլինի՝

$$8{\cdot}2 = 8{\cdot}2^{20}:$$

Բերվածը ***աստիճանային աճի*** մի օրինակ է. 8 -ը տրված թիվն է կամ մեծությունը, 2-ը՝ ***աճի գործակիցը***, 20 -ը՝ ***աճի քայլերի թիվը:*** Իսկ կամայական a թիվը կամ մեծությունը, աճի տրված q գործակցով, աստիճանային աճի արդյունքում առաջին քայլից հետո կդառնա aq, երկրորդից հետո՝ aq^2, երրորդից հետո՝ aq^3, իսկ n -րդ քայլերից հետո մենք կստանանք մի թիվ կամ մեծություն, որը որոշվում է հետևյալ օրենքում նշված արտահայտությամբ:

Ասփիճանային աճի օրենքը

Աճի q գործակցով աստիճանային աճի դեպքում մեծության a քանակությունը կամ թիվը աճի n քայլից հետո կդառնա aq^n:

5. Արփադրյալի ասփիճանը: Աստիճանի գաղափարը սահման-վում է արտադրյալի միջոցով, և այդ պատճառով այս երկու գործողու-թյունների միջև գոյություն ունի սերտ կապ:

Արփադրյալի ասփիճանը

Արտադրյալի աստիճանը հավասար է արտադրիչների աստիճանների արտադրյալին: Այսինքն՝ կամայական x և y արտահայտությունների և n բնական թվի համար՝

$$(x\cdot y)^n = x^n \cdot y^n:$$

Ապացուցում: Իսկապես, համաձայն աստիճանի սահմանման և արտա-դրյալի տեղափոխական և զուգորդական օրենքների, կամայական x և y արտահայտությունների և n բնական թվի համար ունենք՝

$$(x\cdot y)^n = \underbrace{(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot\ldots\cdot(x\cdot y)}_{n\,\text{հատ}} = \underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\,\text{հատ}}\cdot\underbrace{y\cdot y\cdot\ldots\cdot y}_{n\,\text{հատ}} = x^n\cdot y^n:$$

Այստեղից, համաձայն հավասարության փոխանցելիության օրենքի, կստանանք՝ $(x\cdot y)^n = x^n\cdot y^n$:

Օրինակ՝ $18^2 = (2\cdot 9)^2 = 2^2\cdot 9^2 = 4\cdot 81 = 324$:

Արտադրյալի աստիճանի հատկությունը հնարավորություն է տալիս նաև հեշտությամբ բազմապատկել միևնույն n աստիճանացույցն ունեցող x^n և y^n աստիճանները:

Միևնույն ցուցիչով ասփիճանների արփադրյալը

Կամայական x և y արտահայտությունների և n բնական թվի համար՝

$$x^n y^n = (xy)^n:$$

Օրինակ՝ $0{,}2^3\cdot 5^3 = (0{,}2\cdot 5)^3 = 1^3 = 1$:

Դյուրին է միևնույն հիմքն ունեցող աստիճանների բազմապատկումը:

Միևնույն հիմքով ասփիճանների արփադրյալը

Միևնույն հիմքով աստիճանները բազմապատկելիս հիմքը մնում է նույնը, իսկ աստիճանացույցերը գումարվում են: Այսինքն՝ կամայական x արտահայտության և m, n բնական թվերի համար

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}:$$

Ապացուցում: Օգտվելով աստիճանի սահմանումից և արտադրյալի հատկություններից՝ կստանանք՝

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{ հատ}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m\text{ հատ}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n+m\text{ հատ}} = x^{n+m}, \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m}:$$

Օրինակ՝ $x^3 \cdot x^2 \cdot x = x^{3+2+1} = x^6$:

6. Աստիճանի աստիճանը: Միևնույն հիմքով աստիճանների արտադրյալի հատկությունը հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ հաշվել նաև աստիճանի աստիճանը:

Աստիճանի աստիճանը

Աստիճանը աստիճան բարձրացնելիս հիմքը մնում է նույնը, իսկ աստիճանացույցները բազմապատկվում են: Այսինքն՝ կամայական x արտահայտության և m, n բնական թվերի համար

$$\left(x^m\right)^n = x^{mn}:$$

Ապացուցում: Օգտվելով աստիճանի սահմանումից և միևնույն հիմքերով աստիճանների բազմապատկման հատկությունից՝ x արտահայտության և m, n բնական թվերի համար կստանանք՝

$$\left(x^m\right)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot \ldots \cdot x^m}_{n\text{ հատ}} = x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\text{ հատ}}} = x^{mn}, \ \left(x^m\right)^n = x^{mn}:$$

Օրինակ՝ $(2^3)^2 = 2^6$, $(3^4)^5 = 3^{20}$:

7. Քանորդի աստիճանը: Մենք սովորեցինք աստիճան բարձրացնել կամա-յական արտահայտությունների արտադրյալը: Իսկ ինչպե՞ս աստիճան բարձրացնենք արտահայտությունների քանորդը: Այս հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ հատկությունը:

Կոտորակի աստիճանը

Կոտորակի աստիճանը հավասար է համարիչի աստիճանի և հայտարարի աստիճանի հարաբերությանը: Այսինքն՝ կամայական x և զրոյից տարբեր y արտահայտությունների և n բնական թվի համար՝

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}:$$

Ապացուցում: Իսկապես՝

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\underbrace{\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{y}}_{n\text{ հատ}}=\frac{\overbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}^{n\text{ հատ}}}{\underbrace{y\cdot y\cdot\ldots\cdot y}_{n\text{ հատ}}}=\frac{x^n}{y^n},\ \left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}:$$

Օրինակ՝ $\left(\frac{3}{a}\right)^3=\frac{3^3}{a^3}=\frac{27}{a^3}:$

Կոտորակի աստիճանի հատկությունը և հավասարության համաչափության օրենքը հնարավորություն են տալիս գտնել միևնույն աստիճանա-xցույցն ունեցող աստիճանների հարաբերությունը:

Միևնույն ցուցիչն ունեցող աստիճանների քանորդը

Կամայական x և զրոյից տարբեր y արտահայտությունների և n բնական թվի համար՝

$$\frac{x^n}{y^n}=\left(\frac{x}{y}\right)^n:$$

Օրինակ՝ $\frac{5^4}{10^4}=\left(\frac{5}{10}\right)^4=0{,}5^4=0{,}0625:$

Ինչպես աստիճանների բազմապատկման դեպքում, այստեղ նույնպես դժվար չէ միևնույն հիմքն ունեցող աստիճանների բաժանումը:

Միևնույն հիմքով աստիճանների քանորդը

Զրոյից տարբեր կամայական x արտահայտության և m, n $(m>n)$ բնական թվերի համար

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}:$$

Ապացուցում: Օգտվելով աստիճանի սահմանումից և կոտորակների կրճատման հատկությունից՝ 0 -ից տարբեր x արտահայտության և m, n $(m > n)$ բնական թվերի համար կստանանք՝

$$\frac{x^m}{x^n}=\frac{\overbrace{x\cdot x\ldots x}^{m\text{հատ}}}{\underbrace{x\cdot x\ldots x}_{n\text{հատ}}}==\underbrace{x\cdot x\ldots x}_{m-n\text{հատ}}=x^{m-n},\ \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}\quad:$$

Օրինակ՝ $\frac{4x^6y^7}{2x^4y^6}=2x^{6-4}y^{7-6}=2x^2y^1=2x^2y:$

Օգտվելով կոտորակի աստիճանի հատկությունից՝ մենք կարող ենք գտնել նաև արտահայտության հակադարձի աստիճանը:

Հակադարձի աստիճանը

Զրոյից տարբեր արտահայտության հակադարձի աստիճանը հավասար է նրա աստիճանի հակադարձին: Այսինքն՝ զրոյից տարբեր կամայական x արտահայտության և n բնական թվի համար

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}:$$

Ապացուցում: Իսկապես՝ $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1^n}{x^n} = \frac{1}{x^n}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$:

Օրինակ՝ $\left(\frac{1}{25}\right)^2 = \frac{1^2}{25^2} = \frac{1}{625}$: