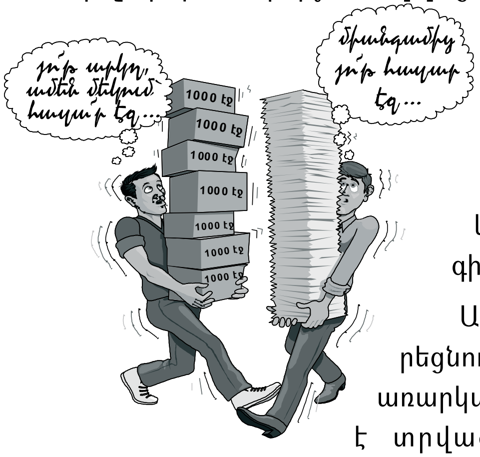
Թեմա 1.4. ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎՈՒՄ

1. Արտադրյալը և հավասարամեծ առարկաների միավորումը: Որոշ թվով հավասարամեծ առարկաների միավորման մեծությունը գտնելու համար անհրաժեշտ է միավորվող առարկաների թիվը բազմապատկել նրանցից մեկի մեծությամբ: Ընդ որում՝ պարտադիր չէ, որ միավորվող առարկաների թիվը լինի բնական: Մենք կարող ենք դիտարկել նաև կամայական կոտորակային, բայց դրական թվով հավասարամեծ առարկաների միավորումը: Միայն պետք է հասկանանք, որ երբ միավորում ենք, օրինակ, $2{,}5$ հատ հավասարամեծ առարկաներ, ապա նկատի ունենք, որ վերցնում ենք երկու հավասարամեծ առարկաներ և նրանց հավասարամեծ երրորդ առարկայի կեսը: Օրինակ՝ $2{,}5$ հատ 10 ար մակերես ունեցող հողամասը կազմված կլինի երկու հատ 10 ար մակերես ունեցող հողամասերից և մեկ հատ՝ նրանցից մեկի կեսին հավասար մակերես ունեցող հողամասից: Միավորման մակերեսը կլինի $2{,}5 \cdot 10$ ար: Ընդհանրապես կամայական թվով հավասարամեծ առարկաների միավորման մեծությունը որոշվում է հետևյալ օրենքով:

Հավասարամեծ առարկաների միավորման մեծությունը

Որոշ թվով հավասարամեծ առարկաների միավորման մեծությունը որոշելու համար պետք է առարկաներից որևէ մեկի մեծությունը բազմապատկել նրանց թվով: Այսինքն՝ x մեծությունն ունեցող a թվով առարկաների միավորման մեծությունն է $a \cdot x$:

2. Արտադրյալը և ավելացումը: §9-ում մենք քննարկեցինք առարկայի այնպիսի փոփոխությունը, որն առաջանում է այդ առարկային ինչ-որ քանակություն ավելացնելիս: Սակայն առարկայի փոփոխությունը տեղի է ունենում ոչ միայն այն ինչ-որ քանակով, այլ նաև ինչ-որ անգամ ավելացնելիս: Մենք կարող ենք, օրինակ, մեր ունեցած դրամը ավելացնել 2 անգամ, առևտրականը իր ապրանքը կարող է ավելացնել $1{,}5$ անգամ, ապրանքի գինը ավելացնել 3 անգամ և այլն:



Ավելացման գումարային օրենքը մեզ սովորեցնում է, որ ինչ-որ քանակությամբ ավելացված առարկայի մեծությունը ստանալու համար պետք է տրված առարկայի մեծությանը գումարել ավելացված առարկայի մեծությունը: Իսկ ինչպե՞ս որոշենք ինչ-որ անգամ ավելացումից հետո ստացված առարկայի մեծությունը:

Ավելացման արտադրյալային օրենքը

Տրված մեծությունն ունեցող առարկան ինչ-որ թիվ անգամ ավելացնելուց հետո ստացված առարկայի մեծությունը հավասար է այդ թվի և տրված մեծության արտադրյալին: Այսինքն՝ x մեծություն ունեցող առարկան a անգամ ավելացումից հետո ստացված առարկայի մեծությունը կլինի $a \cdot x$:

Հաճախ մեծությունը ինչ-որ անգամ ավելացնելու դեպքում «ավելացնել» բառի փոխարեն, դրան զուգընթաց, գործածվում են նաև այն բառերը, որոնք մենք նշեցինք « 9 -ում: Ասում են, օրինակ, կարտոֆիլի քանակությունը հինգ անգամ շատացավ, պարանը երեք անգամ երկարացրին և այլն:

Այստեղ հարկ է ուշադրություն դարձնել ևս մեկ հանգամանքի վրա: Երբ մենք քանակությանը ավելացնում ենք ինչ-որ x քանակություն, ապա ավելացված x քանակությունը տրված քանակությանը համասեռ մի մեծություն է: Իսկ երբ քանակությունը ավելացնում ենք ինչ-որ a անգամ, ապա այդ a-ն ոչ թե մեծություն է, այլ թիվ: Առաջին դեպքում մենք ասում ենք՝ քանակությունը ավելացավ x*-ով*, իսկ երկրորդ դեպքում՝ a ***անգամ***:

3. Մակերեսը և ծավալը որպես արտադրյալ: Բազմապատկման գործողության կարևոր կիրառություններից մեկը ստացվում է ուղղանկյունաձև առարկայի մակերեսը հաշվելիս:

Ուղղանկյունաձև առարկայի մակերեսը

Ուղղանկյունաձև առարկայի մակերեսը հավասար է նրա երկարության և լայնության արտադրյալին:

Այսպիսով՝ եթե ուղղանկյունաձև առարկայի երկարությունը a է, լայնությունը՝ b, իսկ մակերեսը՝ S, ապա մենք ստանում ենք մաթեմատիկայի կարևոր բանաձևերից մեկը՝ $S = ab$:

Արտադրյալի հաջորդ կարևոր կիրառությունը կապված է մարմնի ծավալը որոշելու խնդրի հետ: Առօրյա կյանքում մեզ հաճախ է անհրաժեշտ լինում իմանալ ամանի, տակառի, ճամպրուկի կամ պահարանի տարողությունները, փայտի, բենզինի, յուղի, ջրի և այլ պինդ կամ հեղուկ մարմինների ծավալները: Իհարկե, եթե ուզում ենք որոշել տակառի տարողությունը, ապա կարող ենք նրա մեջ լցնել հեղուկ այնքան ժամանակ, քանի դեռ տակառը չի լցվել: Տակառը լցնելու համար անհրաժեշտ հեղուկի քանակությունն էլ կլինի տակառի ծավալը: Սակայն տարողության կամ ծավալի հաշվումը նման եղանակով միշտ չէ, որ նպատակահարմար է: Իսկ երբեմն էլ այդ ձևով ծավալի հաշվումը ուղղակի անհնար է: Մենք չենք կարող, օրինակ, նման ձևով հաշվել ճամպրուկի և պահարանի տարողությունը, բնակարանի ու դահլիճի ծավալը: Ահա այս դեպքերում մեզ օգնության է գալիս բազմապատկման գործողությունը:

Ուղղանկյունանիստի տեսք ունեցող մարմնի ծավալը

Ուղղանկյունանիստի տեսք ունեցող մարմնի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:

Այսպիսով՝ եթե ուղղանկյունանիստի տեսք ունեցող մարմնի հիմքի մակերեսը S է, իսկ բարձրությունը՝ h, ապա նրա V ծավալը կլինի $S \cdot h$, և մենք ստանում ենք մաթեմատիկայի՝ նույնպես կարևոր մի բանաձև՝ $V = S \cdot h$:

4. Արտադրյալի այլ կիրառություններ: Առօրյա կյանքում մենք հաճախ հայտնվում ենք այնպիսի իրադրություններում, երբ անհրաժեշտ է լինում կատարել ընտրություն՝ առաջացած տարբեր հնարավորությունների միջև: Առավոտյան հագնվելիս մենք ընտրություն ենք կատարում մեր հագնելիք շորերի միջև, աշխատանքի կամ սովորելու գնալիս ընտրում ենք տրանսպորտի միջոցներից մեկը, հեռուստացույց նայելիս ընտրում ենք տարբեր ալիքներով ցուցադրվող հաղորդումներից մեկը, բարձրագույն կրթություն ստանալու համար ընտրում ենք բազմաթիվ համալսարաններից մեկը և այլն: Հաճախ նման ընտրությունները հաջորդում են մեկը մյուսին, և անհրաժեշտություն է առաջանում հաշվել հնարավոր բոլոր հաջորդական ընտրությունների թիվը: Բերենք մեկ օրինակ:

Արմանն ունի 3 տաբատ և 4 վերնաշապիկ: Այդ շորերը հագնելու ընտրության քանի՞ հնարավորություն ունի նա:

Յուրաքանչյուր տաբատի հետ Արմանը կարող է հագնել իր 4 վերնաշապիկ-ներից յուրաքանչյուրը. հնարավոր է 4 ընտրություն: Քանի որ տաբատների թիվը 3 է, ապա ընդամենը կստացվի 3.4 ընտրություն: Նման արդյունք է ստացվում նաև կամայական թվով ընտրություններ կատարելիս:

Հաջորդական ընտրությունների քանակը

Եթե երկու ընտրություններ հաջորդում են իրար, և առաջին ընտրությունը հնարավոր է կատարել m, իսկ երկրորդը՝ n եղանակով, ապա գոյություն ունի $m \cdot n$ եղանակ՝ կատարելու նախ՝ առաջին, ապա՝ երկրորդ ընտրությունը:

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում որոշել ուղղանկյունաձև դասավորված առարկաների թիվը: Նման դեպքերում նպատակահարմար է օգտվել հետևյալ օրենքից:

Ուղղանկյունաձև դասավորված առարկաների թիվը

a թվով հորիզոնական և b թվով ուղղաձիգ շարքեր ունեցող ուղղանկյունաձև դասավորված առարկաների թիվը հավասար է $a \cdot b$:

5. Արտադրյալի տեղափոխական օրենքը: Ուղղանկյան S մակերեսը որոշելու համար նրա a երկարությունը բազմապատկում ենք b լայնությամբ՝ $S = a \cdot b$: Բայց եթե նրա b լայնությունը բազմապատկենք a երկարությամբ, ապա նորից կստանանք նույն S մակերեսը՝ $S = b \cdot a$: Այս երկու հավասարություններից կստանանք՝ $a \cdot b = b \cdot a$: Վերջին հավասարությունը հնարավորություն է տալիս ձևակերպելու արտահայտությունների բազմապատկման կարևորագույն հատկություններից մեկը:

Արտադրյալի տեղափոխական օրենքը

Արտադրիչների տեղափոխումից արտահայտությունների արտադրյալը չի փոխվում: Այսինքն՝ կամայական x և y արտահայտությունների համար

$$x \cdot y = y \cdot x :$$

6. Արտադրյալի զուգորդական օրենքը: Դիցուք՝ այժմ ուզում ենք որոշել ուղղանկյունանիստի ծավալը, որի լայնությունը a է, երկարությունը՝ b, իսկ բարձրությունը՝ h: Ուղղանկյունանիստի V ծավալը հավասար է հիմքի S մակերեսի և բարձրության արտադրյալին: Այսինքն՝ $V = S \cdot h = (a \cdot b) \cdot h$: Այժմ նույն ուղղանկյունանիստի ծավալը հաշվենք մեկ այլ եղանակով: Որպես նրա հիմք ընդունենք b և h երկարությամբ կողեր ունեցող նիստը: Այդ դեպքում a երկարությամբ կողը կլինի ուղղանկյունանիստի բարձրություն: Եվ ուղղանկյունանիստի V ծավալը հավասար կլինի հիմքի $b \cdot h$ մակերեսի և a բարձրու-թյան արտադրյալին, այսինքն՝ $V = (b \cdot h) \cdot a$: Այստեղից, հաշվի առնելով նաև $V = (a \cdot b) \cdot h$, կստանանք՝ $(b \cdot h) \cdot a = a \cdot (b \cdot h)$: Հետևաբար՝ $(a \cdot b) \cdot h = a \cdot (b \cdot h)$: Ստացված հավասարությունը բնութագրում է արտադրյալի մի շատ կարևոր հատկություն:

Արտադրյալի զուգորդական օրենքը

Կամայական x, y, z արտահայտությունների համար

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) :$$

Քանի որ երեք արտահայտությունների արտադրյալը տրված հերթականությամբ կազմելիս արդյունքը կախում չունի արտադրիչների զուգորդման հերթականությունից, ապա մենք կարող ենք նման արտադրյալները գրառելիս փակագծերը դնել ուզած ձևով կամ էլ ուղղակի դրանք բաց թողնել: Այսպիսով՝ կամայական x, y, z արտահայտությունների համար

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z :$$

7. Հավասարության արտադրյալային հատկությունները: Հետևյալ օրենքը կապ է հաստատում հավասարության և բազմա-պատկման գործողության միջև:

Հավասարությունների բազմապատկման օրենքը

Երկու հավասարությունների ձախ մասերի արտադրյալը հավասար է նրանց աջ մասերի արտադրյալին: Այսինքն՝ կամայական x, y, z, t արտահայտությունների համար

եթե $x = y,\ z = t$, ապա $x \cdot z = y \cdot t$:

Իսկ իրավունք ունենք հավասարության երկու մասերը բազմապատկելու միևնույն թվով կամ արտահայտությամբ: Այդպիսի իրավունք է մեզ տալիս հետևյալ հատկությունը:

Հավասարության արտադրյալային հատկությունը

Հավասարության երկու մասերը միևնույն արտահայտությամբ բազմապատկելիս նորից ստացվում է հավասարություն: Այսինքն՝ կամայական x, y, z արտահայտությունների համար

եթե $x = y$, ապա $x \cdot z = y \cdot z$:

Ապացուցումը	Փաստարկները
$x = y$	*տրված հավասարությունը*
$z = z$	*հավասարության անդրադարձելիության օրենքը*
$x \cdot z = y \cdot z$	*հավասարությունների բազմապատկման օրենքը*

8. Արտադրյալի գումարային հատկությունները: Ինչպե՞ս գտնենք a երկարություն և b լայնություն ունեցող ուղղանկյան S մակերեսը, եթե այն տրոհված է երկու՝ b_1 և b_2 լայնություններով ուղղանկյունների:

Խնդրի լուծման համար մենք ունենք երկու եղանակ: Մի կողմից $S = a \cdot b$: Մյուս կողմից՝ տրոհումից ստացված ուղղանկյունների մակերեսները կլինեն $a \cdot b_1$ և $a \cdot b_2$: Համաձայն քանակությունների միավորման գումարային օրենքի՝ տրոհված ուղղանկյան մակերեսը հավասար է տրոհումից առաջացած ուղղանկյունների մակերեսների գումարին: Այսինքն՝ $S = a \cdot b_1 + a \cdot b_2$: Այժմ, նկատի ունենալով, որ $b = b_1 + b_2$, նախորդ հավասարություններից կստանանք՝ $a \cdot (b_1 + b_2) = a b_1 + a b_2$: Այսպիսի հավասարությամբ կապված են նաև կամայական իրական թվերի և, ընդհանրապես, արտահայտությունների բազմապատկման և գումարման գործողությունները:

Գումարի նկատմամբ արտադրյալի բաշխական օրենքը

Կամայական a, b, c արտահայտությունների համար՝

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c :$$

Մենք գիտենք, որ կամայական թիվ 0 թվով բազմապատկելիս ստացվում է զրո: Զրո է ստացվում նաև կամայական արտահայտությունը զրոյով բազմապատկելիս:

Զրոյի արտադրյալային հատկությունը

Կամայական արտահայտության և զրոյի արտադրյալը հավասար է զրոյի: Այսինքն՝ կամայական a արտահայտության համար

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 :$$

Ապացուցում: Քանի որ $a \cdot 0 + a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 1$, ապա $a \cdot 0 = 0$:

Քննարկենք բազմապատկման կապը հակադիրի հետ:

Հակադիրի արտադրյալային հատկությունները

Կամայական a և b արտահայտությունների համար.

ա. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$,

բ. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$:

Ապացուցում: ա. Քանի որ

$$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b) = a \cdot 0 = 0,$$

ապա

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b) :$$

բ. Ապացուցվում է նույն կերպ:

Արտադրյալը բաշխական է նաև հանման գործողության նկատմամբ:

Տարբերության նկատմամբ արտադրյալի բաշխականությունը

Կամայական a, b, c արտահայտությունների համար՝

$$a\,(b-c) = a\,b - a\,c:$$

Ապացուցում: Իսկապես՝

$$a\cdot(b-c) = a\cdot(b+(-c)) = ab + a\cdot(-c) = ab + (-ac) = ab - ac :$$

9. Մեկը հանրահաշվում: Թվաբանությունից մեզ հայտնի է, որ մեկը կամայական թվով բազմապատկելիս ստացվում է այդ թիվը: Հետևյալ օրենքը ցույց է տալիս, որ կամայական արտահայտության հետ նույնպես՝ մեկը բազմապատկելիս արդյունքում ստացվում է այդ նույն արտահայտությունը:

Մեկի բազմապատկման օրենքը

Արտահայտության և 1-ի արտադրյալը հավասար է այդ արտահայտությանը: Այսինքն՝ կամայական a արտահայտության համար

$$a \cdot 1 = a:$$

Բազմապատկման գործողության մեջ մեկի այս դերը շատ նման է գումարման գործողության մեջ զրոյի ունեցած դերին:

10. Հակադարձը հանրահաշվում: Թվաբանությունից մեզ ծանոթ է թվի հակադարձի գաղափարը: Օրինակ՝ 2 թվի հակադարձը $\frac{1}{2}$ թիվն է: Եթե մենք 2-ը բազմապատկենք $\frac{1}{2}$ թվով, ապա կստանանք 1, այսինքն՝ $2\cdot\frac{1}{2}$:

Մեկի հետ ունեցած ահա այս կապը ընկած է նաև արտահայտության հակադարձի սահմանման հիմքում:

Հակադարձի սահմանումը

Արտահայտության հակադարձ է կոչվում այն արտահայտությունը, որը տվյալ արտահայտության հետ բազմապատկելիս արդյունքում ստացվում է 1: Այսինքն՝ a արտահայտության հակադարձը այն b արտահայտությունն է, որի համար

$$a\cdot b = 1:$$

Նկատի ունենալով արտադրյալի տեղափոխական օրենքը՝ հակադարձի սահմանման մեջ $a\cdot b=1$ հավասարության փոխարեն կարող ենք ընդունել նաև $b\cdot a=1$ հավասարությունը:

Օրինակներ.

ա. 5 թվի հակադարձը $\frac{1}{5}$ թիվն է , որովհետև $5\cdot\frac{1}{5}=1$,

բ. -5 թվի հակադարձը $\frac{1}{-5}$ թիվն է, որովհետև $(-5)\cdot\frac{1}{-5}=1$:

գ. 1 -ի հակադարձը 1 -ն է:

Բոլոր թվերը, բացի զրոյից, ունեն հակադարձ:

Զրոյի անհակադարձելիության հատկությունը

0 թիվը հակադարձ չունի:

Ապացուցում: Իսկապես, համաձայն 0-ի արտադրյալային հատկության, 0-ն ինչ արտահայտությամբ էլ բազմապատկենք, կստանանք 0 և ոչ թե 1:

Հակադարձի գոյության օրենքը

Զրոյից տարբեր յուրաքանչյուր արտահայտություն ունի հակադարձ:

Զրոյից տարբեր a արտահայտության հակադարձը նշանակվում է $1/a$ տեսքով: Մենք ունենք նաև $a\cdot 1/a = 1$: Այստեղից հետևում է նաև, որ $1/a$ -ի հակադարձը a-ն է:

Հակադարձի հակադարձը

*Զրոյից տարբեր արտահայտության հակադարձի հակադարձը այդ նույն արտահայտությունն է: Այսինքն զրոյից տարբեր **a** արտահայտության համար*

$$1/(1/a) = a:$$

Նկատի ունենալով այս հատկությունը՝ a և $1/a$ արտահայտությունները կանվանենք փոխհակադարձ:

11. Հակադարձի հատկությունները: Արտահայտության հակա-դարձը օժտված է մի շարք կարևոր հատկություններով, որոնց իմացու-թյունը ավելի դյուրին է դարձնում նրա հետ գործողությունների կատարումը:

Արտադրյալի հակադարձը

Արտադրյալի հակադարձը հավասար է արտադրիչների հակադարձների արտադրյալին: Այսինքն՝ զրոյից տարբեր կամայական a և b արտահայ-տությունների համար

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}:$$

Ապացուցում: Զրոյից տարբեր կամայական a և b արտահայտություն-ների համար ունենք.

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot(a\cdot b)=\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=1\cdot 1=1,\ \frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}:$$

Հետևյալ հատկությունը թույլ է տալիս գտնել արտահայտության հակադիրի հակադարձը:

Արտադրյալի զրո լինելու պայմանը

Եթե արտահայտությունների արտադրյալը զրո է, ապա արտադրիչներից գոնե մեկը պետք է լինի զրո: Այսինքն՝

$$\text{եթե } ab=0,\ \text{ապա } a=0 \text{ կամ } b=0:$$

Ապացուցում: Դիցուք a և b արտահայտությունների համար $ab=0$ և a -ն զրո չէ: Այդ դեպքում՝

$$b=1\cdot b=\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot b=\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot 0=0,\ b=0:$$

12. Հավասարման արտադրյալային հատկությունները: Բազմաթիվ են կիրառական խնդիրները, որոնց լուծումները հանգում են արտադրյալ պարունակող հավասարումների: Բերենք մեկ օրինակ:

Մուշեղի դրոշմանիշերի թիվը քառապատկվելուց հետո դարձավ 2500: Քանի՞ դրոշմանիշ ուներ Մուշեղը:

Խնդիրը գրառենք հանրահաշվորեն:

x	Մուշեղի ունեցած դրոշմանիշերի թիվը
$4\cdot x$	դրոշմանիշերի թիվը քառապատկվելուց հետո
$4x=2500$	խնդրի պայմանը

Այսպիսով, տրված խնդրի լուծումը հանգեց $4x=2500$ հավասարման լուծման: Ուշադիր եղեք. ի տարբերություն գումարային հավասարումների, այստեղ անհայտը ունի «գործակից», մի թվային արտադրիչ, որով այն բազմապատկվում է: Նման հավասարումները լուծվում են հետևյալ կերպ:

$ax=b$ հավասարման լուծումը

$ax=b$ հավասարումը, որի մեջ a-ն և b-ն կամայական հաստատուններ են, և a-ն զրո չէ, ունի հետևյալ լուծումը.

$$x = \frac{1}{a} \cdot b \,:$$

Ապացուցում: Դիցուք a -ն զրոյից տարբեր է: Պարզ է, որ $\frac{1}{a} \cdot b$ -ն $ax = b$ հավասարման լուծում է, քանի որ.

$$a \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot b \right) = \left(a \cdot \frac{1}{a} \right) \cdot b = 1 \cdot b = b, \; a \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot b \right) = b \,:$$

Օրինակ, $4x = 2500$ հավասարման լուծումն է $x = \frac{1}{4} \cdot 2500$ կամ $x = 625$:

$ax + b = c$ հավասարման լուծումը

Զրոյից տարբեր a և կամայական b և c արտահայտությունների համար $ax + b = c$ հավասարման լուծումն է

$$x = \frac{1}{a} \cdot (c - b):$$

Ապացուցում: $\frac{1}{a} \cdot (c - b)$-ն նշված հավասարման լուծումն է, քանի որ.

$$a\left(\frac{1}{a} \cdot (c - b) \right) + b = a \cdot \frac{1}{a} \cdot c - a \cdot \frac{1}{a} \cdot b + b = c - b + b = c \,:$$

Բերենք նշված տեսքի հավասարումների լուծման օրինակներ:

ա. $2x + 3 = 7$ հավասարման լուծումն է $x = \frac{1}{2} \cdot (7 - 3)$ կամ $x = 2$:

բ. $7 \cdot (2{,}1 - x) - 4{,}4 \cdot (2x - 5) = 5{,}1$, $14{,}7 - 7x - 8{,}8x + 22 = 5{,}1$,

$$-15{,}8x + 36{,}7 = 5{,}1, \; x = \frac{1}{-15{,}8} \cdot (5{,}1 - 36{,}7) \;\; x = 2 \,:$$

Նկատենք, որ $ax + b = c$ և $ax = c - b$ հավասարումներն ունեն միևնույն լուծումները: Այդ պատճառով հաճախ $ax + b = c$ հավասարման լուծումը գրելիս այն նախապես փոխարինվում է $ax = c - b$ հավասարմամբ: Այսպիսով՝ անհայտ չպարունակող b գումարելին տեղափոխվում է հավասարման մյուս մասը և փոխվում է նրա նշանը: Դիտարկենք նման մի քանի օրինակ:

ա. $8(1 - 3x) - 2(x + 1) = -7$, $8 - 24x - 2x - 2 = -7$, $-26x + 6 = -7$,

$-26x = -7 - 6$, $-26x = -13$, $x = 0{,}5$:

բ. $2y-(100+4y)+17(1-3y)=23$, $-53y-83=23$,

$-53y=23+83$, $y=-2$:

գ. $0{,}5\cdot(3x+1)=3{,}5$, $3x+1=\dfrac{1}{0{,}5}\cdot3{,}5$, $3x=7-1$, $x=\dfrac{1}{3}\cdot6$, $x=2$:

դ. $(7{,}1-4x)\dfrac{1}{1{,}3}=7$, $-4x=9{,}1-7{,}1$, $x=\dfrac{1}{-4}\cdot2$, $x=-\dfrac{1}{2}$:

13. Մեծության և թվի բազմապատկումը: Մենք արդեն գիտենք, որ հավասարամեծ առարկաների միավորման քանակությունը որոշելու համար այդ առարկաների թիվը բազմապատկում ենք նրանցից մեկի մեծությամբ: Իսկ ինչպես կատարենք մեծության բազմապատկումը թվով:

Եթե համատեղ կշռենք 2 հատ 5 կիլոգրամանոց արկղեր, ապա կստանանք 10 կգ: Այսինքն՝ $2\cdot5$ կգ $=10$ կգ $=(2\cdot5)$ կգ: Ուրեմն՝ 2 թիվը 5 կգ մեծությամբ բազմապատկելու համար մենք 2-ով ենք բազմապատկում 5 կգ մեծության թվային արժեքը՝ 5-ը: Նման ձևով է բազմապատկվում նաև կամայական թիվը կամայական մեծության հետ:

Մեծության եվ թվի բազմապատկման օրենքը

Մեծությունը թվով և թիվը մեծությամբ բազմապատկելիս այդ թվով բազմապատկվում է մեծության թվային արժեքը: Այսինքն՝ եթե մեծության միավորը e-ն է, քանակությունը՝ ae-ն, ապա կամայական b թվի համար.

$$(ae)b=b(ae)=(ba)e\ :$$

Օրինակներ:

ա. $20\cdot10$ կմ = $(20\cdot10)$ կմ = 200 կմ:

բ. $25\cdot15$ քառ. մ = $(25\cdot15)$ քառ. մ $=375$ քառ. մ:

Նշենք, որ սովորաբար մեծության և թվի արտադրյալը գրառելիս նախ գրվում է թիվը, ապա՝ մեծությունը:

14. Մեծությունների արտադրյալը: Ուղղանկյան մակերեսը որոշելու համար մենք իրար հետ բազմապատկեցինք նրա երկարությունը և լայնությունը: Ուղղանկյունանիստի հիմքի մակերեսը բազմապատկեցինք նրա բարձրությամբ և ստացանք նրա ծավալը: Հաճախ անհրաժեշտ է լինում իրար հետ բազմապատկել նաև այլ մեծություններ: Իսկ ինչպես կատարենք մեծությունների բազմապատկման գործողու-թյունը:

Դիցուք՝ ուզում ենք որոշել 20 մ երկարություն և 10 մ լայնություն ունեցող ուղղանկյան մակերեսը: Մենք գիտենք, որ $20 մ \cdot 10 մ$ = $(20 \cdot 10)$ քառ. մ: Այսինքն՝ տրված երկու մեծությունները բազմապատկելու համար նրանց թվային արժեքները բազմապատկում ենք իրար, միավորները՝ իրար: Ահա այս կերպ են բազմապատկվում նաև կամայական երկու մեծություններ:

Մեծությունների բազմապատկման օրենքը

Եթե տրված են առաջին մեծության i միավորը և երկրորդ մեծության j միավորը, ապա առաջին մեծության ai քանակության և երկրորդ մեծության bj քանակության արտադրյալը հավասար է $(ab)(ij)$: Այսինքն՝

$$(ai)\cdot(bj)=(ab)(ij):$$

Օրինակներ:

ա. 5 մ . 6 մ = $(5\cdot6)$ (մ · մ) = 30 մ²:

բ. 14 մ² · 15 մ = $(14\cdot15)$ (մ² · մ) = 210 մ³:

Մեծությունը թվով բազմապատկելու և մեծությունների բազմապատկման օրենքները հնարավորություն են տալիս կամայական մեծության չափման տարբեր միավորները արտահայտել միմյանցով: Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. 1 ժ = 60 ր = 60 · (60 վրկ) = $(60\cdot60)$ վրկ = 3600 վրկ, 1 ժ = 3600 վրկ:

բ. 1 կմ² = 1 կմ · 1 կմ = 1000 մ · 1000 մ = $(1000\cdot1000)$ մ² =
= $(100\cdot10000)$ մ² = 100 · (10000 մ²) = 100 հա, 1 կմ² = 100 հա:

գ. 1 մ³ = (10 դմ · 10 դմ) · 10 դմ = $((10\cdot10)\cdot10)$ ((1 դմ. 1 դմ) . 1 դմ) =
= 1000 դմ³ = 1000 լ, 1 մ³ = 1000 լ:

15. Մաս: Արտադրյալի կարևոր կիրառություններից մեկը կապված է առարկայի մասը գտնելու խնդրի հետ: Անշուշտ, դուք լսած կլինեք «քառորդ ժամ», «ապրանքի մեկ երրորդ մասը», «ճանապարհի երկու երրորդ մասը» և մասի գործածությամբ այլ արտահայտություններ: Եթե մսավաճառը վաճառել է իր ունեցած 90 կգ մսի մեկ երրորդ մասը, ապա այստեղ այդ մասը մսի այն բաժինն է, որի զանգվածը 30 կիլոգրամ է: Այսինքն՝ առարկայի մասը նույնպես առարկա է: Այնուհետև, եթե մեզ հետաքրքրում է 90 կիլոգրամի մեկ երրորդ մասը, ապա այն 30 կգ է: Այսինքն՝ մեծության մասը մեծություն է: Վերջապես, հաճախ մեզ անհրաժեշտ են լինում գտնել նաև թվերի և, ընդհանրապես, արտահայտությունների մասերը. 90 -ի մեկ երրորդ մասը 30 է: Այսպիսով՝ մասը գործածվում է երեք բնույթի հասկացությունների համար՝ առարկայի, մեծության և թվի կամ արտահայտության: Բայց մաթեմատիկայում հիմնականում գործածվում են մեծության, թվի և արտահայտության մասերը:

Մասի սահմանումը

Դիցուք a -ն դրական թիվ է :

ա. x մեծության a մաս է կոչվում ax մեծությունը :

բ. x թվի կամ արտահայտության a մաս է կոչվում ax թիվը կամ արտահայտությունը :

Օրինակ՝

ա. Եթե դուք կարդացել եք 150 էջ ունեցող գրքի 30 էջը, ապա ձեր կարդացածը այդ գրքի $1/5$ մասն է:

բ. 150 մետրի $1/5$ մասը 30 մետր մեծությունն է:

գ. 150 թվի $1/5$ մասը 30 թիվն է:

Առարկայի, մեծության կամ արտահայտության մեկ մասը կոչվում է նաև նրա *ամբողջ մաս*, $1/2$ մասը՝ նրա *կես*, իսկ $1/4$ մասը՝ նրա *քառորդ* : Հասկանալի է, որ առարկայի, մեծության կամ արտահայտության ամբողջ մասը հավասար է իրեն :

Խնդիր: Ցույց տալ, որ մեծության կամ թվի a մասի b մասը հավասար է նրա ab մասին:

Լուծումը	Փաստարկները
$b(ax)$	*x մեծության a մասի b մասը*
$b(ax)=(ba)x$	*մեծությունը թվով բազմապատկելու օրենքը*
$(ba)x=(ab)x$	*արտադրյալի տեղափոխական օրենքը*
$b(ax)=(ab)x$	*հավասարության փոխանցական օրենքը*

Թվի համար լուծումը և փաստարկները նույնն են, բացառությամբ 2-րդ քայլի, որտեղ որպես փաստարկ օգտագործվում է արտադրյալի զուգորդական օրենքը:

Թեմա 1.5. ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎՈՒՄ

1. Բաժանման գործողության սահմանումը: Առօրյա կյանքում մենք հաճախ ենք հանդիպում այնպիսի իրադրությունների, երբ անհրաժեշտություն է առաջանում առարկաների մի որոշ քանակություն բաժանել մի քանի հավասար մասերի: Եվ ամենաբնական ու կարևոր հարցը, որ առաջանում է նման դեպքերում, այն է, թե այդպիսի բաժանման արդյունքում առաջացած հավասար մասերից յուրաքանչյուրը ինչքա՞ն կլինի: Այս հարցի պատասխանը տալիս է բաժանման գործողությունը:

Բաժանման գործողության սահմանումը

Երկու արտահայտությունների քանորդը կամ հարաբերությունը այն արտահայտությունն է, որը բազմապատկելով երկրորդ արտահայտությամբ՝ ստացվում է առաջին արտահայտությունը: Երկու արտահայտությունների քանորդը գտնելու գործողությունը կոչվում է բաժանում:

Այսպիսով՝ a և b արտահայտությունների քանորդը կամ հարաբերությունը այն x արտահայտությունն է, որի համար $b\cdot x=a$: Գրառելու համար a և b արտահայտությունների քանորդը գործածվում են

$$a:b,\ a\div b,\ \frac{a}{b},\ a/b$$

նշանակումները: Քանորդի $a:b$ նշանակման մեջ a -ն կոչվում է ***բաժանելի***, իսկ b -ն՝ ***բաժանարար:*** $\frac{a}{b}$ նշանակումը կոչվում է նաև ***կոտորակ***, a -ն կոչվում է կոտորակի ***համարիչ***, իսկ b -ն՝ նրա ***հայտարար:***

Օրինակ. $15:3=5$, որովհետև $5\cdot3=15$: Այստեղ $15:3$ հարաբերության մեջ 15-ը բաժանելին է, իսկ 3-ը՝ բաժանարարը:

Բաժանման գործողության սահմանումից անմիջականորեն հետևում է, որ կամայական a/b կոտորակի համար՝

$$\frac{a}{b}\cdot b=a \text{ և } \frac{ab}{b}=a:$$

Պարզ է նաև, որ կամայական a/b կոտորակի և c արտահայտության համար

$$c\cdot\frac{a}{b}=\frac{ca}{b}, \text{ քանի որ } \left(c\cdot\frac{a}{b}\right)\cdot b=c\cdot\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)=ca:$$

2. Քանորդի կապը արտադրյալի և հակադարձի հետ: Քանորդի շատ կարևոր օրինակ է արտահայտության հակադարձը:

Հակադարձը որպես քանորդ

Զրոյից տարբեր յուրաքանչյուր a արտահայտության հակադարձը 1 և a արտահայտությունների քանորդն է:

Ահա և a արտահայտության հակադարձը $\dfrac{1}{a}$ տեսքով նշանակելու պատճառը:

Ապացուցում: Իսկապես, համաձայն հակադարձի սահմանման՝ $a\cdot\dfrac{1}{a}=1$: Իսկ սա, համաձայն բաժանման գործողության սահմանման, նշանակում է, որ $\dfrac{1}{a}$ -ը 1 և a արտահայտությունների քանորդն է:

Արդյո՞ք գոյություն ունի երկու արտահայտությունների քանորդը: Եվ գոյու-թյուն ունենալու դեպքում էլ ինչի՞ է հավասար այն:

Նախ դիտարկենք 0-ի վրա բաժանման դեպքը: Դիցուք՝ մենք ուզում ենք որևէ a արտահայտություն բաժանել 0-ի վրա: Եթե նման բաժանում հնարավոր լիներ, և x քանորդը գոյություն ունենար, ապա, համաձայն բաժանման գործողության սահմանման, կունենայինք $x\cdot 0=a$: Բայց $x\cdot 0=0$: Այս երկու հավասարություն-ներից կստանանք $a=0$: Այսպիսով՝ եթե թույլատրվեր a արտահայտությունը բաժանել 0-ի վրա, ապա այն նույնպես կհավասարվեր 0-ի: Բայց 0-ն նույնպես չի կարելի բաժանել 0-ի վրա: Որովհետև, եթե թույլատրվեր նման բաժանում, ապա այդ բաժանման արդյունքը կլիներ ոչ թե մի թիվ կամ արտահայտություն, այլ կամայական x արտահայտություն, քանի որ $0\cdot x=0$:

Արված դիտողությունները նկատի ունենալով՝ ընդունենք հետևյալ օրենքը:

Օրենք զրոյի վրա բաժանման անթույլատրելիության մասին

Զրոյի վրա բաժանում չի թույլատրվում:

Այսպիսով՝ 0-ն չի կարող լինել որևէ կոտորակի հայտարար, կամ կամա-յական a արտահայտության համար անիմաստ են $a:0$, $\dfrac{a}{0}$ գրառումները:

Այժմ անցնենք հիմնական դեպքին:

Քանորդի արտահայտումը արտադրյալի և հակադարձի միջոցով

Կամայական a և զրոյից տարբեր b արտահայտությունների համար.

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}:$$

Ապացուցում: Իսկապես՝

$$\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot b=a\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=a\cdot 1=a\,,\;\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot b=a,\;\;\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}:$$

Օրինակ՝ $\frac{2}{3}=2\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}=4\cdot\frac{1}{5}$ և այլն:

3. Կոտորակների հավասարությունը: Դիտարկենք $\frac{1}{2}$ և $\frac{3}{6}$ կոտորակները: Դրանք ունեն տարբեր համարիչներ ու հայտարարներ, բայց իրար հավասար են: Շատ կարևոր է պարզել, թե ընդհանրապես երկու կոտորակներ երբ են իրար հավասար:

Կոտորակների հավասարության հատկությունը

Կամայական a,c և զրոյից տարբեր b,d արտահայտությունների համար

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\;\;\text{նշանակում է}\;\;a\cdot d=c\cdot b:$$

Ապացուցում: Դիցուք $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$: Այդ դեպքում.

$$a\cdot d=\frac{a}{b}\cdot b\cdot d=\frac{c}{d}\cdot d\cdot b=c\cdot b\,,\;a\cdot d=c\cdot b:$$

Հակառակը, դիցուք $ad=cb$: Այդ դեպքում՝

$$b\cdot\frac{c}{d}=\frac{bc}{d}=\frac{ad}{d}=a,\;\;\frac{a}{b}=\frac{c}{d}:$$

Օգտվելով կոտորակների հավասարության և արտադրյալի տեղափոխական ու զուգորդական հատկություններից՝ հեշտությամբ կապացուցենք նաև հետևյալ հատկությունը:

Կոտորակի կրճատման հատկությունը

Կամայական a և զրոյից տարբեր b և c արտահայտությունների համար

$$\frac{c\cdot a}{c\cdot b}=\frac{a}{b}:$$

Կոտորակների կրճատման հատկությունը հնարավորություն է տալիս

$\frac{c \cdot a}{c \cdot b}$ կոտորակը փոխարինել նրան հավասար և ավելի պարզ տեսք ունեցող $\frac{a}{b}$ կոտորակով, այսինքն՝ $\frac{c \cdot a}{c \cdot b}$ կոտորակի մեջ կրճատել համարիչի և հայտարարի c ընդհանուր բաժանարարը: Օրինակ՝

$$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}, \quad \frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}, \quad \frac{3a - 3b}{ca - cb} = \frac{3(a-b)}{c(a-b)} = \frac{3}{c}:$$

4. Հավասարության քանորդային հատկությունները: Մենք արդեն գիտենք, որ կարելի է միաժամանակ հավասարության երկու մասերին գումարել և երկու մասերից հանել միևնույն արտահայտությունը, նրա երկու մասերը բազմապատկել միևնույն արտահայտությամբ: Իսկ կարելի՞ է հավասարության երկու մասերը միաժամանակ բաժանել միևնույն արտահայտության վրա:

Հավասարության քանորդային հատկությունը

Հավասար արտահայտությունները զրոյից տարբեր միևնույն արտահայտության վրա բաժանելիս ստացվում են հավասար արտահայտություններ: Այսինքն՝ կամայական a, b և զրոյից տարբեր c արտահայտությունների համար՝

եթե $a = b$, ապա $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$:

Ապացուցումը	**Փաստարկները**
$a = b$	*պայմանը*
$\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$	*հարաբերության հատկությունը, հավասարության արտադրյալային հատկությունը*
$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	*հավասարության փոխանցական հատկությունը*

Հավասարությունների բաժանման հատկությունը

Կամայական a, b և զրոյից տարբեր c, d արտահայտությունների համար՝

եթե $a = b, c = d$, ապա $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$:

Ապացուցումը	Փաստարկները
$c = d \qquad a = b$	*պայմանները*
$\frac{1}{c} = \frac{1}{d}$	*հակադարձների հավասարության հատկությունը*
$a \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \frac{1}{d}$	*հավասարության արտադրյալային օրենքը*
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	*քանորդի սահմանումը*

5. Հավասարման բաժանման հատկությունները: Կիրառական խնդիրների լուծման մեջ արտադրյալային հավասարումների հետ միասին լայնորեն կիրառվում են նաև կոտորակային հավասարումները:

Լուծենք նման պարզագույն հավասարումը:

$\frac{x}{a} = b$ **հավասարման լուծումը**

$\frac{x}{a} = b$ հավասարումը, որի մեջ a-ն զրոյից տարբեր, իսկ b-ն կամայական արտահայտություններ են, ունի $x = a \cdot b$ լուծումը:

Ապացուցում: Պարզ է, որ $a \cdot b$-ն $\frac{x}{a} = b$ հավասարման լուծումն է, քանի որ $\frac{a \cdot b}{a} = b$:

Օրինակ՝ $\frac{x}{2} = 3$ հավասարման լուծումն է $x = 2 \cdot 3$ կամ $x = 6$:

Նույն կերպ կապացուցենք նաև հետևյալ հատկությունը:

$\frac{x}{a} + b = c$ **հավասարման լուծումը**

$\frac{x}{a} + b = c$ հավասարման լուծումն է $x = a \cdot (c - b)$:

Օրինակներ.

ա. $\frac{x}{4} + 2 = 7, \quad x = 4 \cdot (7 - 2), \quad x = 20$:

բ. $0{,}2 + \frac{2x}{3} = 1{,}2, \quad 2x = 3 \cdot (1{,}2 - 0{,}2), \quad 2x = 3, \quad x = \frac{3}{2}$:

Բաժանման կիրառումը մեզ հնարավորություն է տալիս նաև $ax=b$ հավասարումը լուծելիս ավելի արագ հասնել արդյունքի:

$ax=b$ հավասարման լուծումը

$ax=b$ հավասարումը, որի մեջ a-ն և b-ն կամայական արտահայտություններ են և a-ն զրո չէ, ունի $x=\dfrac{b}{a}$ լուծումը:

Օրինակ՝ $3x=6$ հավասարման լուծումն է $x=6/3=2$:

6. Առարկայի տրոհումը հավասարամեծ մասերի: Զանազան իրադրություններում հաճախ անհրաժեշտ է լինում առարկաները տրոհել հավասարամեծ մասերի: Օրինակ՝ երբ մենք ուզում ենք հողակտորը հավասարապես բաշխել մի քանի հոգու միջև, երբ բեռը տեղավորում ենք հավասար տարողությամբ մի քանի արկղերի մեջ, ապա դրանք տրոհում ենք հավասարամեծ մասերի: Իսկ ինչպես որոշենք մասերից յուրաքանչյուրի մեծությունը՝ երբ առարկան տրոհում ենք մի քանի հավասարամեծ մասերի:

Հավասարամեծ մասերի մեծությունը գտնելու օրենքը

Երբ առարկան բաժանված է որոշ թվով հավասարամեծ մասերի, ապա մասերից յուրաքանչյուրի մեծությունը գտնելու համար անհրաժեշտ է առարկայի մեծությունը բաժանել տրված թվի վրա: Այսինքն՝ եթե a մեծությունն ունեցող առարկան բաժանված է m թվով հավասարամեծ մասերի, ապա մասերից յուրաքանչյուրը կունենա $a:m$ մեծությունը:

Օրինակ, եթե 400 կգ ալյուրը հավասարաչափ տեղավորել ենք 8 պարկերում, ապա պարկերից յուրաքանչյուրում կլինի 400 կգ:8, կամ 50 կգ ալյուր:

7. Հարաբերություն և համեմատում: §16 -ում մենք տեսանք, որ միևնույն սեռի երկու առարկաներ իրար հետ համեմատելիս կազմվում է նրանց մեծությունների տարբերությունը, որը և ցույց է տալիս, թե առարկաներից մեկը մյուսից որքանով է մեծ: Սակայն հաճախ առարկաները համեմատելիս հարկ է լինում իմանալ, թե նրանցից մեկը ոչ թե ինչքանով, այլ ինչքան անգամ է մեծ մյուսից: Դիտարկենք մեկ օրինակ:

Երբևէ դուք տեսե՞լ եք գեր մարդկանց վազելիս: Երևի՝ հազվադեպ: Իսկ գիտե՞ք ինչու են գեր մարդիկ խուսափում վազելուց: Որովհետև մարդն ինչքան գեր է, այնքան վտանգավոր է վազելը նրա սրտի համար: Իսկ ինչպե՞ս որոշենք, թե երկու մարդկանցից որն է ավելի գեր. նա, ով ավելի մեծ կշի՞ռ ունի, թե՞ նա, ով ավելի թիկնեղ է: Իհարկե, ո՛չ մեկը, և ո՛չ էլ մյուսը: Փորձեք համեմատել ձեզ ծանոթ մարդկանց մեջքի և կոնքի չափերը: Դուք կտեսնեք, որ ինչքան գեր է մարդը, այնքան նրա մեջքի չափերը մեծ են կոնքի չափերի համեմատությամբ: Ահա մեջքի և կոնքի չափերի հարաբերությամբ էլ բնութագրվում է մարդու գիրությունը:

Նշանակենք w տառով մարդու մեջքի, իսկ h տառով՝ կոնքի շրջագծերի երկարությունները: Այդ դեպքում նրա գիրությունը կբնութագրվի w/h հարաբերությամբ: Ինչքան մեծ է այդ հարաբերությունը, այնքան մարդն ավելի գեր է: Բժիշկները պարզել են, որ վազելը կնոջ սրտի համար սկսում է վտանգավոր դառնալ, եթե $w/h > 0{,}8$: Տղամարդը վազելիս ավելի ապահով կարող է լինել. վազելը նրա սրտի համար դառնում է վտանգավոր, երբ $w/h > 1$: Եթե, օրինակ, կնոջ մեջքը 75 սմ է, իսկ կոնքը՝ 80 սմ, ապա $w/h = 75$ սմ $/80$ սմ: Քանի որ 75 սմ/80 սմ $> 0{,}8$, ապա մեջքի և կոնքի նման չափեր ունեցող կինը վազելիս վտանգում է սիրտը: Բայց 75 սմ/80 սմ < 1: Ուրեմն՝ մեջքի և կոնքի նման չափեր ունեցող տղամարդը վազելիս սիրտը չի վտանգում:

Քանակությունների համեմատության քանորդային օրենքը

Եթե x-ը և y-ը միևնույն սեռի երկու քանակություններ են, ապա x/y հարաբերությունը ցույց է տալիս, թե ինչքան անգամ է առաջին քանակությունը տարբերվում երկրորդի քանակությունից.

ա. եթե $x/y > 1$, ապա առաջինը ավելի է երկրորդից x/y անգամ,

բ. եթե $x/y = 1$, ապա առաջինը հավասար է երկրորդին,

գ. եթե $x/y < 1$, ապա առաջինը պակաս է երկրորդից y/x անգամ:

Օրինակներ.

ա. 20 մետրը 4 մետրից ավելի է 16 մետրով և 5 անգամ:

բ. 80 կգ-ը 10կգ-ից ավելի է 70 կգ-ով և 8 անգամ:

գ. Երևանն ունի մի միլիոն բնակիչ, Գյումրին՝ երկուհարյուր հազար: Համեմատենք այս երկու քաղաքների բնակչության թվերը: Եթե օգտվենք հանման գործողությունից, ապա կստանանք, որ Երևանի բնակչությունը Գյումրիի բնակչությունից ավելի է ութ հարյուր հազարով, իսկ եթե օգտվենք բաժանման գործողություններից, ապա կտեսնենք, որ Երևանի բնակչությունը Գյումրիի բնակչությունից ավելի է հինգ անգամ:

8. Տոկոս: XV դարում Իտալիայում սկսեց ծաղկել առևտուրը, և այն դարձավ կարևորագույն մի հասկացության առաջացման պատճառ: Հեռավոր երկր-ներում իրացնելու նպատակով նավատեր-երը վաճառականներից վերցնում էին ապ-րանք՝ հետագայում հավելավճարով դրամը վերադարձնելու պայմանով: Սակայն հավելավճարի չափը իմանալու խնդրում շատ շուտով առաջացավ մի լուրջ բարդություն:

Դիցուք՝ նավատերը ուզում էր վերցնել 2500 դուկատի արժողու-թյամբ ապրանք: Վաճառականները պատրաստ էին նրան տալ այդքան արժողությամբ ապրանք, փոխարենը վերադարձին պահանջելով մեկը՝ 3600 դուկատ, իսկ մյուսը՝ 3500 դուկատ: Բնականաբար այստեղ հավելավճարները շատ հեշտ էր համեմատել. այն ավելի քիչ էր երկրորդ վաճառականի մոտ, և նավատերը նրանից էլ կվերցներ ապրանքը: Իսկ ինչպե՞ս էր պետք վարվել, եթե վաճառական-ները տարբեր քանակություններով ապրանքներ առաջար-կեին: Ասենք, առաջինը 2500 դուկատի արժողությամբ ապրանքի դիմաց պահանջում էր 3750 դուկատ, իսկ երկրորդը՝ 2000-ի դիմաց 3100 դուկատ: Վաճառականներից ո՞վ էր ավելի մեծ հավելավճար պահանջում այդ դեպքում:

Ահա նման դեպքերում հավելավճարի չափերը համեմատելու համար նավատերը երկու դեպքում էլ հաշվում էր 100 դուկատ ապրանքի դիմաց պահանջվող հավելավճարը: Առաջին վաճառականը 100-ի դիմաց պահանջում էր 150 դուկատ, իսկ երկրորդը 100-ի դիմաց՝ 155 դուկատ: Այսպիսով՝ 100-ի դիմաց պահանջվող հավելավճարը առաջին վաճառականի մոտ 50 դուկատ է, իսկ երկրորդի մոտ՝ 55 դուկատ: Ահա այդ *«100-ի դիմաց»* արտահայտությունն էլ անվանվեց տոկոս և նրա համար ընդունվեց այն նշանակումը, որ մենք այսօր գործածում ենք:

Տոկոսի սահմանումը

Թվի, մեծության կամ առարկայի քանակության p տոկոս է կոչվում նրա $\frac{p}{100}$ մասը : Մասնավորապես՝ a թվի p տոկոսը $a\cdot\frac{p}{100}$ թիվն է:

Օրինակներ.

ա. 25-ի 10 տոկոսը հավասար է 2,5-ի,

բ. 50 մետրի 40 տոկոսը հավասար է 20 մետրի,

գ. 1000 դրամի 60 տոկոսը հավասար է 600 դրամի, դ. a թվի 100 տոկոսը հավասար է a-ի:

Ընդունված է «p տոկոս» արտահայտությունը կրճատ գրառել այսպես՝ $p\%$:

Երբ մենք ունենում ենք ինչ-որ գումար, որը չենք ուզում ծախսել, մտածում ենք այն պահելու մասին: Որտե՞ղ է ձեռնտու պահել այդ գումարը: Ավելի ձեռնտու է գումարը հանձնել բանկ, որը այդ գումարը դնելով շրջանառության մեջ՝ ստանում է շահույթ, որի մի մասն էլ, սովորաբար, յուրաքանչյուր տարին լրանալուց հետո, տալիս է մեզ: Նման դեպքերում մեզ տրված շահույթի չափը որոշվում է մեր տված գումարի տոկոսով: Այդ տոկոսը անվանում են *տոկոսադրույք:* Այսպիսով՝ եթե մենք բանկ ենք հանձնել a դրամ գումար՝ $p\%$ տոկոսա-դրույքով, ապա մեր ստացած շահույթը հավասար կլինի a թվի p տոկոսին՝ $a \cdot p / 100$:

Եթե a թվի p տոկոսը նշանակենք b տառով, ապա

$$b = a \cdot \frac{p}{100}:$$

Այստեղ a-ն տրված թիվն է, p-ն՝ տոկոսն արտահայտող թիվը, իսկ b-ն՝ տոկոսը: Նախորդ հավասարության օգնությամբ մենք կարող ենք գտնել a, b, p թվերից յուրաքանչյուրը՝ իմանալով մյուս երկուսը:

Թվի տոկոսը մենք սահմանեցինք նրա մասի միջոցով: Սակայն երբեմն անհրաժեշտ է լինում թվի մասը ներկայացնել որպես նրա տոկոս:

Մասի արտահայտումը տոկոսի միջոցով

Թվի կամ մեծության q մասը նրա $100q$ տոկոսն է:

Օրինակներ.

ա. Թվի $\frac{1}{2}$ մասը նրա 50%-ն է:

բ. Թվի $\frac{1}{4}$ մասը նրա 25%-ն է:

գ. Թվի 1 մասը նրա 100%-ն է:

դ. Թվի 2 մասը նրա 200%-ն է:

9. Մեծության և թվի հարաբերությունը: Մենք գիտենք, որ երբ առարկան բաժանված է որոշ թվով հավասարամեծ մասերի, ապա մասերից յուրաքանչյուրի մեծությունը հավասար է առարկայի մեծության և տվյալ թվի հարաբերությանը: Իսկ ինչպե՞ս որոշենք մեծության և թվի հարաբերությունը:

Մեծության և թվի հարաբերության սահմանումը

Մեծության և թվի հարաբերությունը այն մեծությունն է, որը բազմապատկելով տրված թվով՝ ստացվում է տրված մեծությունը:

Օրինակ, 6 հա : 2 հարաբերությունը 3 հա մեծությունն է, որովհետև $2\cdot 3$ հա $=6$ հա:

Հետևյալ հատկությունը հնարավորություն է տալիս գտնելու մեծության և թվի հարաբերությունից ստացված մեծությունը:

Մեծության և թվի հարաբերության հատկությունը

Մեծությունը թվի վրա բաժանելու համար անհրաժեշտ է մեծության թվային արժեքը բաժանել այդ թվի վրա՝ պահպանելով տրված մեծության չափման միավորը: Այսինքն, եթե ունենք մեծության չափման e միավորն ու a և b թվերը, ապա

$$ae:b=(a:b)e:$$

Ապացուցումը	Փաստարկները
$b\cdot((a:b)e)=(b\cdot(a:b))\,e$	*թվի և մեծության արտադրյալի սահմանումը*
$=ae$	*քանորդի սահմանումը*
$b\cdot(a:b)e=ae$	*հավասարության փոխանցական հատկությունը*
$ae:b=(a:b)e$	*մեծության և թվի հարաբերության սահմանումը*

Օրինակներ.

ա. 10000 դոլար $:5=(10000:5)$ դոլար $=2000$ դոլար:

բ. 20 կմ $:4=(20:4)$ կմ $=5$ կմ:

10. Համասեռ մեծությունների հարաբերությունը: § 30 -ում մենք տեսանք, որ միևնույն մեծության երկու քանակություններ համեմատելիս հաճախ անհրաժեշտ է լինում որոշել նրանց հարաբերությունը: Իսկ ի՞նչ է միևնույն մեծության երկու քանակությունների կամ երկու համասեռ մեծությունների հարաբերությունը:

Համասեռ մեծությունների հարաբերության սահմանումը

Երկու՝ x և y համասեռ մեծությունների հարաբերություն է կոչվում այն թիվը, *որը բազմապատկելով y մեծությամբ՝ ստացվում է x մեծությունը: Այսինքն՝ x և y համասեռ մեծությունների հարաբերությունը այն a թիվն է, որի համար $x = ay$:*

Հետևյալ հատկությունը հեշտացնում է երկու համասեռ մեծությունների հարաբերությունը գտնելը:

Համասեռ մեծությունների հարաբերության հատկությունը

Չափման միևնույն միավորով արտահայտված երկու համասեռ մեծությունների հարաբերությունը հավասար է այդ մեծությունների թվային արժեքների հարաբերությանը: Այսինքն՝ եթե ունենք չափման e միավորով արտահայտված ae և be մեծությունները, ապա

$$\frac{ae}{be} = \frac{a}{b} :$$

Ապացուցում: Քանի որ $\frac{a}{b} \cdot be = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)e = ae$, ապա $\frac{a}{b} \cdot be = ae$ և, համաձայն քանորդի սահմանման, $\frac{ae}{be} = \frac{a}{b}$:

Այստեղ անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել այն հանգամանքի վրա, որ համասեռ մեծությունների հարաբերությունը կազմելիս այդ մեծություն-ները պետք է արտահայտել չափման միևնույն միավորով: Օրինակ՝ եթե ուզում ենք գտնել 2 կմ և 500 մ երկարությունների հարաբերությունը, ապա չի կարելի գրել 2 կմ/500 մ = 2/500: Մենք պետք է այդ մեծությունները նախ արտահայ-տենք չափման միևնույն միավորով և նոր միայն կազմենք նրանց հարա-բերությունը: Այսպիսով՝

$$2 \text{ կմ}/500 \text{ մ} = 2000 \text{ մ}/500 \text{ մ} = 2000/500 = 4:$$

11. Գին: Անշուշտ, մեզանից յուրաքանչյուրը հաճախ է գնումներ կատարում: Եվ առաջին տեղեկություններից մեկը, որ մենք ուզում ենք իմանալ մեզ անհրաժեշտ ապրանքի մասին, նրա գինն է: Իսկ ի՞նչ է ապրանքի գինը:

Դիցուք՝ առաջին խանութից 2 կգ կարագը մենք գնել ենք 3000 դրամով, իսկ երկրորդ խանութից նույն որակի 2 կգ կարագը գնել ենք 2800 դրամով: Ո՞ր խանութում կատարած գնումն է ավելի շահեկան: Իհարկե, երկրո՛րդ խանութում, կասեք դուք, քանի որ նույն քանակությամբ կարագի համար երկրորդ խանութում ավելի քիչ ենք վճարել: Իսկ եթե առաջին խանութից 2 կգ կարագը գնել ենք 3000 դրամով, երկրորդ խանութից նույն որակի 3 կգ կարագը՝ 4200 դրամով, ապա ո՞ր խանութում կատարած գնումն է ավելի ձեռնտու այս դեպքում: Խնդիրը այստեղ արդեն դժվարանում է, քանի որ տրված են կարագի տարբեր քանակությունների արժեքները: Եվ որպեսզի կարողանանք պարզել, թե որ խանութում կատարած գնումն է ավելի ձեռնտու, մենք պետք է գտնենք միևնույն քանակությամբ կարագի արժեքը երկու խանութում էլ: Ավելի նպատակահարմար է գտնել մեկ կիլոգրամի արժեքը թե՛ առաջին, և թե՛ երկրորդ խանութում: Առաջին խանութում մեկ կիլոգրամ կարագն արժե 3000/2 դրամ կամ 1500 դրամ, իսկ երկրորդում՝ 4200/3 դրամ կամ 1400 դրամ: Հետևաբար, առաջին խանութում կարագը ավելի թանկ է: Այսպիսով՝ իմանալով մեկ կիլոգրամ կարագի արժեքը՝ մենք կարողացանք որոշել, թե որ խանութում է կարագը ավելի թանկ: Այդ մեկ կիլոգրամի արժեքն էլ կարագի գինն է: Ընդհանրապես՝ որևէ մեծությամբ բնութագրվող ապրանքի միավոր քանակության արժեքը կոչվում է նրա ***գին***:

Օրինակ՝ եթե կարագի մեկ կիլոգրամը վաճառվում է 1500 դրամով, ապա նրա գինն է. մեկ կիլոգրամը՝ 1500 դրամ: Եթե բենզինի լիտրը վաճառվում է 350 դրամով, ապա նրա գինն է. մեկ լիտրը՝ 350 դրամ:

Գինը ապրանքը բնութագրող կարևոր մեծություն է: Իմանալով հաստատուն գնով վաճառվող ապրանքի գինը՝ մենք կարող ենք որոշել նրա ցանկացած քանակության արժեքը: Իսկապես, եթե օրինակ մեկ կիլոգրամ կարագի արժեքը 1500 դրամ է, ապա 3 կիլոգրամի արժեքը կլինի $3 \cdot 1500$ դրամ, 4 կիլոգրամի արժեքը՝ $4 \cdot 1500$ դրամ, և այլն:

Ինչպե՞ս նշանակենք ապրանքի գինը: Դիցուք՝ ապրանքի 1 կիլոգրամի ար-ժեքը 1500 դրամ է: Այդ դեպքում նրա գինն է՝ 1 կիլոգրամը 1500 դրամ: «1 կիլոգրամը 1500 դրամ» արտահայտության փոխարեն կգրենք նաև «1500 դրամ առ կիլոգրամ»: Առավել նպատակահարմար է ապրանքի գինը ներկայացնել որպես ապրանքի արժեքի և ապրանքի քանակության հարաբերություն: Իսկապես, եթե, նորից, 2 կգ կարագի արժեքը 3000 դրամ է, ապա նրա գինն է՝ 1 կիլոգրամը 1500 դրամ: Կազմենք 3000 դրամ և 2 կգ մեծությունների 3000 դրամ/2 կգ հարաբերությունը: Կատարելով «կրճատում», ինչպես այն արվում էր սովորական կոտորակների հետ, մենք կստանանք

$$3000 \text{ դրամ}/2 \text{ կգ} = 1500 \text{ դրամ}/1 \text{ կգ} = 1500 \text{ դրամ/կգ}:$$

1500 դրամ/կգ հարաբերությունը «1 կիլոգրամը 1500 դրամ» արտահայ-տության կամ կարագի գնի մի այլ նշանակումն է:

12. Արագություն: Հավասարաչափ շարժվելով՝ 2 ժամում առաջին ավտոմեքենան անցավ 160 կիլոմետր, իսկ երկրորդը՝ 180 կիլոմետր: Այստեղ երկրորդ ավտոմեքենան ավելի արագ էր շարժվում, քանի որ նույն ժամանակա-հատվածում այն ավելի երկար ճանապարհ է անցել: Իսկ եթե հավասարաչափ շարժվող ավտոմեքենաներից առաջինը 2 ժամում անցել է 160 կիլոմետր, իսկ երկրորդը՝ 3 ժամում 210 կիլոմետր, ո՞ր ավտոմեքենան է ավելի արագ շարժվել այս դեպքում:

Առաջին ավտոմեքենան 2 ժամում անցել է 160 կիլոմետր, մեկ ժամում կանցնի 80 կմ: Երկրորդ ավտոմեքենան 3 ժամում անցել է 210 կիլոմետր, մեկ ժամում կանցնի 70 կմ: Քանի որ մեկ ժամում առաջին ավտոմեքենան ավելի շատ ճանապարհ է անցել, ուրեմն այն ավելի արագ է շարժվել:

Այսպիսով՝ ավտոմեքենաների շարժման ընթացքները իրար հետ համեմատելու համար անհրաժեշտ եղավ գտնել միավոր ժամանակում նրանցից յուրաքանչյուրի անցած ճանապարհը: Այդ մեծությունը կոչվում է ավտոմեքենայի արագություն: Ընդհանրապես, հավասարաչափ շարժվող մարմնի ***արագություն*** է կոչվում միավոր ժամանակահատ-վածում նրա անցած ճանապարհը :

Օրինակ՝ եթե մեկ ժամում ավտոմեքենան անցել է 80 կմ, ապա նրա արագությունն է՝ մեկ ժամում 80 կմ: Եթե ինքնաթիռը մեկ ժամում անցել է
800 կմ, ապա նրա արագությունն է՝ մեկ ժամում 800 կմ:

Արագությունը մարմնի շարժումը բնութագրող կարևոր մեծություն է: Իմանալով, օրինակ, հավասարաչափ շարժվող ավտոմեքենայի արագությունը՝ մենք կարող ենք որոշել, թե որքան ճանապարհ է անցել այն յուրաքանչյուր ժամանակահատվածում:

Արագության համար ևս կընդունենք այնպիսի նշամակում, ինչպիսին ընդունել ենք գնի համար. «մեկ ժամում 80 կմ» արտահայտության փոխարեն կգործածենք նաև «80 կմ առ ժամ» արտահայտությունը:

Նպատակահարմար է արագությունը նույնպես ներկայացնել որպես մեծությունների հարաբերություն: Իսկապես, եթե ավտոմեքենան 3 ժամում անցել է 180 կմ, ապա նրա արագությունն է՝ մեկ ժամում 60 կմ: Այդ արագությունը ստանալու համար կազմենք 180 կմ և 3 ժամ մեծությունների՝ 180 կմ / 3 ժամ հարաբերությունը: Կատարելով կրճատում, ինչպես այն արվում է սովորական կոտորակների հետ՝ մենք կստանանք

$$180\ \text{կմ}/3\ \text{ժամ} = 60\ \text{կմ}/1\ \text{ժամ} = 60\ \text{կմ/ժամ}.$$

Ստացված 60 կմ/ժամ հարաբերությունը «1 ժամում 60 կմ» արտահայտու-թյան կամ ավտոմեքենայի արագության մի այլ նշանակումն է:

13. Տարասեռ մեծությունների հարաբերությունը: Ապրանքի գինը որոշելիս մենք բաժանում ենք նրա արժեքը այդ ապրանքի քանակության վրա: Հավասարաչափ շարժվող մարմնի անցած ճանապարհի և այդ ընթացքում նրա ծախսած ժամանակի հարաբերությունը նրա արագությունն է: Այլ դեպքերում նույնպես հաճախ անհրաժեշտ է լինում կազմել երկու տարասեռ մեծությունների հարաբերությունը: Իսկ ինչ է երկու տարասեռ մեծությունների հարաբերությունը:

Տարասեռ մեծությունների հարաբերության սահմանումը

x և y տարասեռ մեծությունների հարաբերությունը այն z մեծությունն է, որի համար՝ $z \cdot y = x$: Այսպիսով՝ եթե x և y տարասեռ մեծությունների հարաբերությունը նշանակենք $\frac{x}{y}$, ապա $\frac{x}{y} \cdot y = x$:

Հարկ է նշել, որ այստեղ, ի տարբերություն արտահայտությունների հարաբերության, x/y հարաբերության մեջ x-ը և y-ը ոչ թե արտահայտություններ են, այլ՝ մեծություններ: Ինչպես վարվենք նման կոտորակների հետ առնչվելիս: Այստեղ կարևոր դեր է խաղում մեծությունների հարաբերությունը թվերի հարաբերության հետ կապող հետևյալ հատկությունը:

Տարասեռ մեծությունների հարաբերության հատկությունը

Կամայական x և զրոյից տարբեր y տարասեռ մեծությունների ու կամայական a և զրոյից տարբեր b թվերի համար

$$\frac{ax}{by} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} :$$

Ապացուցում: Քանի որ

$$by \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}\right) = \left(b \cdot \frac{a}{b}\right)\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = ax,$$

ապա

$$\frac{ax}{by} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}:$$

Վերջին հատկությունը հնարավորություն է տալիս մեծությունների հարաբերության մեջ կատարել չափման միավորների փոփոխություն:

Օրինակ՝

1 կմ/ժ = 1000 մ/3600 վրկ = 1000/3600 մ/վրկ = 5/18 մ/վրկ:

Այս հատկությունը հնարավորություն է տալիս նաև մեծությունների հարաբերությունը հանգեցնել թվերի հարաբերության:

Խնդիր: Ցույց տալ, որ կամայական x և զրոյից տարբեր y տարասեռ մեծությունների ու կամայական a,c և զրոյից տարբեր b և d թվերի համար՝

$$\frac{ax}{by}=\frac{cx}{dy} \quad \text{նշանակում է} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}:$$

Լուծում: Նախ ցույց տանք, որ եթե $\frac{ax}{by}=\frac{cx}{dy}$, ապա $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

Իսկապես, քանի որ $\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{ax}{by}=\frac{cx}{dy}=\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}$, ապա $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

Նույն կերպ ապացուցվում է նաև, որ եթե $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *ապա* $\frac{ax}{by}=\frac{cx}{dy}$:

Հետևյալ հատկությունը ցույց է տալիս, որ մեծությունների հարաբերության մեջ կարելի է կատարել «կրճատում», ինչպես այդ անում էինք սովորական քանորդների դեպքում:

Մեծությունների հարաբերության կրճատման հատկությունը

Կամայական x և զրոյից տարբեր y տարասեռ մեծությունների և զրոյից տարբեր a թվի համար

$$\frac{ax}{ay}=\frac{x}{y}:$$

Ապացուցում: Իսկապես, քանի որ $\frac{x}{y}\cdot ay=a\cdot\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=ax$, ապա $\frac{ax}{ay}=\frac{x}{y}$:

Օրինակ՝ 15կմ/5կմ = 15/5 = 3: