Թեմա 1.2. ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎՈՒՄ

1. Քանակությունների միավորումը և գումարումը: Ինչպե՞ս կշռել փիղը: Որոշ քանակությամբ մթերք կշռելու համար մենք կարող ենք օգտվել լծակավոր կամ զսպանակավոր կշեռքից: Մենք կարող ենք հեշտությամբ կշռվել և իմանալ մեր քաշը: Այսօր կան՝ փիղը, տանկը, ինքնաթիռը և ուրիշ շատ ավելի ծանր առարկաներ կշռելու համար անհրաժեշտ կշեռքներ: Իսկ ինչպե՞ս են փիղը կշռել հին աշխարհի մարդիկ:

Առաջին անգամ փիղը կշռել է հույն հանճարեղ մաթեմատիկոս Արքիմեդը, որն ապրել է մեր թվարկությունից առաջ՝ երրորդ դարում: Արքիմեդը ստեղծեց չափազանց հնարամիտ ու զարմանալի մի կշեռք փիղը կշռելու համար: Նա մտածեց, որ եթե նավը լցնի ինչ-որ առարկաներով, ապա դրանց ծանրության ազդեցության տակ այն ինչ-որ չափով կընկղմվի: Եվ ինչքան ծանր լինեն առարկաները, նավը այնքան ավելի շատ կընկղմվի: Իսկ եթե առարկաների երկու քանակություններ լցնելուց հետո նավը ընկղմվի միևնույն չափով, ապա ի՞նչ կարելի է ասել այդ քանակությունների մասին: Այդ քանակություններն ունեն միևնույն կշիռը, կասեք դուք: Իսկ այդ դեպքում մի՞թե նավը կշեռք չի դառնում, և նրանով հնարավոր չի լինում կշռել, օրինակ, փիղը: Ահա Արքիմեդի մտահղացումը: Նա նավը լցրեց քարերով այնքան ժամանակ, մինչև որ այն ընկղմվեց փղի ծանրության տակ կատարված ընկղմման չափով: Առանձին - առանձին կշռելով օգտագործված

սրերը՝ Արքիմեդը գումարեց դրանց ղորի կշիռները և ստացավ փղի կշիռը:

յս փորձի հիմքում ընկած է ֆիզիկայի րնորագույն օրինաչափություններից որը հետագայում մեծ տարածում գտավ ց Արքիմեդի օրենք: Արքիմեդի փորձի ընկած է նաև մի հանրահաշվական իություն, որը չնայած որևէ անվանում ց մեր կյանքում խաղում է շատ ավելի դեր, քան Արքիմեդի օրենքը: Այդ օրինաչափությունը հնարա-վորություն է տալիս որոշելու առարկա-ների միավորման քանակությունը:

Միավորման գումարային օրենքը

Եթե x *և* y *մեծություններ ունեցող երկու համասեռ առարկաներ չունեն ընդհանուր մաս, ապա նրանց միավորման մեծությունը կլինի* $x+y$*:*

Նկատենք, որ այստեղ խոսվում է համասեռ առարկաների միավորման մասին: Անիմաստ է խոսել տարասեռ առարկաների, ասենք, 2 կիլոմետր երկարություն ունեցող մետաղալարի և 3 ար մակերես ունեցող հողամասի միավորման մեծության մասին. այն ո՛չ երկարության միավորներով կչափվի և ո՛չ էլ մակերեսի միավորներով:

Այնուհետև՝ միավորվող քանակությունները չպետք է ունենան ընդհանուր մաս: Եթե նրանք ընդհանուր մաս ունենային, ապա նրանց միավորման քանակությունը արդեն հավասար չէր լինի նրանց քանակությունների գումարին:

Հայոց լեզվում առարկաների միավորումը նշելու համար հաճախ գործածվում են նաև ***միացնել***, ***կցել, խառնել, միասին, ընդամենը*** և այլ բառեր: Օրինակ, մենք ասում ենք՝ կցեցին պարանի կտորները, միացրին հողամասերը, խառնեցին հեղուկի քանակությունները և այլն:

2. Քանակության ավելացումը և գումարումը: Մեզ շրջապատող առարկաները ժամանակի ընթացքում կարող են փոփոխվել: Առարկաների փոփոխության դեպքում դրանք բնութագրող մեծությունները նույնպես կարող են փոփոխվել՝ ավելանալ կամ պակասել: Այսպես, օրինակ, գիրանալիս տավարի քաշը ավելանում է, նիհարելիս՝ պակասում: Եղանակը տաքանալիս օդի ջերմաստիճանը բարձրանում է, ցրտելիս՝ իջնում: Ապրանքի գինը և բանկից ստացած տարեկան տոկոսադրույքը նույնպես կարող են բարձրանալ կամ իջնել: Երկարության, մակերեսի, ծավալի, զանգվածի և, ընդհանրապես, կամայական մեծության քանակությունը կարող է ավելանալ կամ պակասել: Ինչպե՞ս որոշենք առարկայի մեծությունը նման դեպքերում:

Ավելացման գումարային օրենքը

Ավելացումից հետո ստացված քանակությունը հավասար է սկզբնական քանակության և ավելացված քանակության գումարին: Այսինքն՝ x *մեծություն ունեցող առարկային նրան համասեռ* y *մեծություն ունեցող առարկան ավելացնելուց ստացված առարկայի մեծությունը կլինի* $x+y$*:*

Օրինակ, եթե 3մ պարանին ավելացնենք ևս 2մ, ապա կունենանք 3մ + 2մ պարան, 10կգ խնձորին ավելացնենք 5կգ, կստանանք 10կգ + 5կգ, 8 լիտր ջրին ավելացնենք 2 լիտր ջուր, կստանանք 8լ + 2լ ջուր և այլն:

Ինչպես առարկաների միավորման դեպքում, այստեղ նույնպես պետք է նկատի ունենալ, որ ավելացումից հետո ստացված առարկայի մեծությունը կարող ենք որոշել, եթե տրված և ավելացված առարկաները համասեռ են:

Հայոց լեզվում զանազան առարկաների փոփոխությունը նշելիս ***ավելացնել*** բառին զուգընթաց գործածվում են նաև հետևյալ բառերը.

Առարկաների մեծությունը	«ավելացնել» բառի փոխարեն գործածվող բառերը
երկարություն	մեծացնել, երկարացնել, բարձրացնել, խորացնել, կցել, ձգել, լայնացնել, միացնել
մակերես	մեծացնել, ընդարձակել, լայնացնել, կցել, միացնել
ծավալ	մեծացնել, ընդարձակել, հաստացնել, ծավալել, կցել
զանգված	մեծացնել, ծանրացնել, շատացնել, խոշորացնել,
ժամանակ	մեծացնել, երկարացնել, ձգել,
արագություն	մեծացնել, բարձրացնել,
ջերմություն	մեծացնել, տաքացնել, բարձրացնել,
գին	մեծացնել, թանկացնել, բարձրացնել,
տոկոսադրույք	մեծացնել, բարձրացնել

Այսպես, օրինակ, մենք ասում ենք. ճանապարհը երկարացրին, ջրհորը խորացրին, պարանին կցեցին, միջանցքը լայնացավ, պահեստը ընդարձակվեց, ավտոմեքենայի արագությունը բարձրացավ, ապրանքը թանկացավ և այլն:

3. Գումարման տեղափոխական օրենքը: Գումարման գործողությունը օժտված է մի շարք կարևոր հատկություններով, որոնց իմացությունը հեշտացնում է այդ գործողության կատարումը: Այդ օրենքներից առաջինը վերաբերում է արտահայտությունների գումարի մեջ ***գումարելիների հերթականությունը:*** Նախ դիտարկենք մեկ օրինակ:

Դիցուք մենք A վայրից գնում ենք B վայրը՝ անցնելով a կիլոմետր, այնուհետև B-ից մեկնում ենք C, անցնելով b կիլոմետր: Արդյունքում A-ից C գնալու համար անցնում ենք $a+b$ կիլոմետր: Հետ վերադառնալիս մենք նախ C վայրից գնում ենք B՝ անցնելով b կիլոմետր, ապա B-ից գնում ենք A, անցնելով a կիլոմետր. արդյունքում՝ $b+a$ կիլոմետր: Պարզ է, որ երկու դեպքում էլ մենք անցել ենք նույն ճանապարհը: Այսինքն՝ $a+b=b+a$:

Կամայական արտահայտությունների գումարը նույնպես օժտված է համանման հատկությամբ: Այդ հատկությունն ունի տարածված ձևակերպում:

Գումարման տեղափոխական օրենքը

Գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում: Այսինքն՝ կամայական x և y արտահայտությունների համար՝

$$x + y = y + x:$$

Օրինակ՝ $(0{,}1 + 2x) + (y + 0{,}9) = (y + 0{,}9) + (0{,}1 + 2x)$:

4. Գումարման զուգորդական օրենքը: Գումարման մյուս կարևոր հատկությունը կապված է երկուսից ավելի գումարելիների գումարման հետ:

Դիտարկենք $(1+2)+3$ և $1+(2+3)$ արտահայտությունները: Դրանք երկուսն էլ 1, 2 և 3 թվերից, միևնույն հաջորդականությամբ, գումարման գործողության միջոցով ստացված արտահայտություններ են, որոնց միակ տարբերությունը գումարելիների զուգորդման հերթականությունն է, որ կատարվել է փակագծերի օգնությամբ: Պարզ է, որ $(1+2)+3=1+(2+3)$: Գումարման գործողության հետևյալ հատկությունը ցույց է տալիս, որ զույգավորման կամ զուգորդման նման տարբերությունը էական դեր չի խաղում ոչ միայն տվյալ օրինակում, այլև կամայական երեք արտահայտությունների գումարը կազմելիս:

Գումարման զուգորդական օրենքը

Կամայական x, y, z արտահայտությունների համար՝

$$(x + y) + z = x + (y + z):$$

Գումարման զուգորդական օրենքը թույլ է տալիս երեք կամ ավելի գումարելիների գումարը կազմելիս հաշվի չառնել գումարելիների զույգավորման հերթականությունը և բաց թողնել այն փակագծերը, որոնց միջոցով կատարված է նման զույգավորում: Այսպիսով՝ մասնավորաբար x, y, z երեք արտահայտությունների համար ստանում ենք

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z:$$

5. Հավասարության գումարային հատկությունները: Հավասարությունների ստացման լայն հնարավորություններ է ընձեռնում գումարման գործողությունը: Դիտարկենք մեկ օրինակ: Դիցուք ունենք երկու կշեռք: Առաջին կշեռքի նժարներին դրված են զանգվածի x և y քանակություններ: Կշռումը ցույց է տվել, որ այդ քանակությունները իրար հավասար են՝ $x = y$: Երկրորդ կշեռքի նժարներին դրված զանգվածի z և t քանակությունների կշռումը ցույց է տվել, որ այդ քանակությունները նույնպես միմյանց հավասար են՝ $z = t$: Այժմ, եթե երրորդ կշեռքի նժարներից մեկի վրա դնենք $x + z$ քանակությունը, մյուսի վրա՝ $y+t$ քանակությունը, ապա կշեռքի նժարները նորից կհավասարակշռվեն: Այսինքն՝ $x+z=y+t$:

Այսպիսով՝ մենք գումարեցինք տրված երկու հավասարությունների ձախ մասերը՝ իրար, աջ մասերը՝ իրար և նորից ստացանք հավասարություն: Նման հատկությամբ օժտված են նաև կամայական երկու հավասարություններ:

Հավասարությունների գումարման օրենքը

Հավասարությունները մաս առ մաս գումարելիս ստացվում է հավասարություն: Այսինքն՝ կամայական x, y, z, t արտահայտությունների համար՝

$$\text{եթե } x=y, z=t, \text{ ապա } x+z=y+t:$$

Հավասարության երկու մասերին միևնույն թիվը կամ արտահայտությունը գումարելով՝ նոր հավասարություն ստանալու հնարավորություն է տալիս հավասարության հետևյալ հատկությունը:

Հավասարության գումարային հատկությունը

Հավասարության երկու մասերին միևնույն արտահայտությունը գումարելիս նորից ստացվում է հավասարություն: Այսինքն՝ կամայական x, y, z արտահայտությունների համար՝

$$\text{եթե } x=y, \text{ ապա } x+z=y+z:$$

6. Զրոն հանրահաշվում: Մենք արդեն գիտենք, որ 0-ն այն տասը նիշերից մեկն է, որոնց միջոցով գրվում են բոլոր իրական թվերը: 0 -ն թվաբանության մեջ ունի նաև մի առանձնահատուկ դեր, որը պայմանավորված է գումարման գործողության հետ նրա յուրօրինակ կապով. 0 թիվը կամայական թվի հետ գումարելիս ստացվում է այդ նույն թիվը: Զրոն նման կարևոր դեր ունի նաև հանրահաշվում:

Զրոյի գումարման օրենքը

Կամայական a արտահայտության համար

$$a+0=a:$$

7. Հակադիրը հանրահաշվում: Առօրյա կյանքում և գիտության տարբեր բնագավառներում առաջացած շատ խնդիրների լուծման համար մեզ անհրաժեշտ է թվի կամ արտահայտության հակադիրի գաղափարը: Նման խնդիրների լուծման համար են, առաջին հերթին, ներմուծվել բացասական թվերը, որոնք բնական թվերի հակադիրներ են: Իսկ ի՞նչ է թվի կամ արտահայտության հակադիրը:

Վերցնենք, օրինակ, 5 թիվը: Գումարելով այն -5 թվին՝ կստանանք 0: Այսինքն՝ 5 + (-5) = 0: -5 թիվն էլ կոչվում է 5 թվի հակադիր: Նման ձևով է սահմանվում նաև կամայական արտահայտության հակադիրը:

Հակադիրի սահմանումը

Կամայական a արտահայտության հակադիրը այն b արտահայտությունն է, որի համար՝

$$a + b = 0:$$

Օրինակ՝ 6 թվի հակադիրը -6 թիվն է, քանի որ 6 + (-6) = 0: 0 -ի հակադիրը 0-ն է:Նկատի ունենալով գումարման տեղափոխական օրենքը՝ հակադիրի սահմանման մեջ $a + b = 0$ հավասարության փոխարեն կարող ենք ընդունել $b + a = 0$ հավասարությունը:

Վերևում նշեցինք, որ կամայական a իրական թվի հակադիրը $-a$ իրական թիվն է: Հետևյալ օրենքը ապահովում է հակադիրի գոյությունը նաև կամայական արտահայտության համար:

Հակադիրի գոյության օրենքը

Յուրաքանչյուր արտահայտություն ունի իր հակադիրը:

a արտահայտության հակադիրը գրառվում է $-a$ տեսքով: Այս արտահայտությունը կարդացվում է այսպես՝ «մինուս a»: « $-$ » նշանը կարդացվում է «մինուս»: Համաձայն հակադիրի սահմանման՝ $a+(-a)$ = 0: Այստեղից հետևում է, որ a -ն էլ $-a$ -ի հակադիրն է:

Հակադիրի հակադիրի հատկությունը

Արտահայտության հակադիրի հակադիրը այդ նույն արտահայտությունն է: Այսինքն՝ կամայական a արտահայտության համար՝

$$-(-a) = a:$$

3. Հակադիրի հատկությունները: Հակադիրի ուսումնասիրու-թյունը սկսենք հետևյալ հատկությունից, որը ցույց է տալիս, որ հավասար արտահայտությունների հակադիրները նույնպես հավասար են:

Հակադիրների հավասարության հատկությունը

Կամայական x և y արտահայտությունների համար.

եթե $x = y$, ապա $-x = -y$:

Ապացուցում: Եթե x և y արտահայտությունների համար $x = y$, ապա

$$x + (-y) = y + (-y) = 0:$$

Հետևապես՝ $x + (-y) = 0$, և ուրեմն՝ $-x = -y$:

Մենք արդեն գիտենք, որ արտահայտության հակադիրը սահմանվում է գումարման գործողության միջոցով: Այդ պատճառով գոյություն ունի սերտ կապ այդ երկու գործողությունների միջև:

Գումարի հակադիրի հատկությունը

Երկու արտահայտությունների գումարի հակադիրը հավասար է գումարելիների հակադիրների գումարին: Այսինքն՝ կամայական x և y արտահայտությունների համար

$$-(x+y) = (-x) + (-y):$$

Ապացուցում: Օգտվելով գումարման տեղափոխական և զուգորդական հատկություններից՝ կստանանք.

$$(x + y) + ((-x) + (-y)) = 0:$$

Ուրեմն՝ $(-x) + (-y)$ արտահայտությունը $x + y$ արտահայտության հակադիրն է:

Խնդիր: Եթե երկու արտահայտությունների գումարը հավասար է նրանցից մեկին, ապա մյուսը հավասար է զրոյի:

Լուծում: Դիցուք x և y արտահայտությունների համար $x + y = x$: Այդ դեպքում՝

$$y = 0 + y = -x + x + y = -x + x = 0, \quad y = 0:$$

9. $x+a=b$ հավասարման լուծումը: Մենք տեսանք, որ գումարման գործողությունը սերտորեն է կապված հավասարությունների հետ: Այդ կապերի մեջ է նաև գումարում պարունակող հավասարումների լուծման հիմնական բանալին:

$x + a = b$ հավասարման լուծումը

Կամայական a և b արտահայտությունների համար $x + a = b$ հավասարման լուծումն է $x = b + (-a)$:

Ապացուցում: *$b + (-a)$ արտահայտությունը $x + a = b$ հավասարման լուծումն է, քանի որ*

$$(b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b:$$

Օրինակ՝ $x + 5 = 1$ հավասարման լուծումն է $x = 1 + (-5)$ կամ $x = -4$:

Նման ձևով կարող ենք լուծել նաև $-x = a$ հավասարումը:

$-x = a$ հավասարման լուծումը

Կամայական a արտահայտության համար $-x = a$ հավասարման լուծումն է $x = -a$:

Օրինակ՝ $-x = 3$ հավասարման լուծումն է $x = -3$:

10. Մեծությունների գումարումը: Մենք արդեն գի-տենք, որ զանազան իրադրություններում անհրաժեշտ է լինում կատարել մեծությունների գումարում: Իսկ ինչպե՞ս գտնենք մեծությունների գումարը:

Եթե մենք համատեղ կշռենք 2 տ և 3 տ բերքը, ապա կստանանք 5 տ: Եթե միավորենք 0,25 հա և 0,75 հա հողամասերը, ապա կստացվի 1 հա: Եթե միևնույն ամանի մեջ լցնենք 90 լ սպիրտ և 100 լ ջուր և չափենք ստացված խառնուրդը, կստանանք 190 լ: Բոլոր այս օրինակներում մեծությունները գումարելու համար մենք գումարում ենք նրանց թվային արժեքները և պահպանում չափման միավորը: Այստեղ անհրաժեշտ է կատարել երկու դիտողություն:

Նախ՝ իրար կարելի է գումարել միայն միևնույն սեռի մեծությունները կամ նույնանուն անվանական թվերը: Չի կարելի իրար գումարել, օրինակ, 2 տ և 0,25 հա մեծությունները: Գործնական իմաստ չունեն նաև 2 լ + 4 ժ, 2 մ + 5 կգ, 3 մ + 4 քմ գրառումները:

Այնուհետև՝ համասեռ մեծությունները գումարելիս անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել գումարելիների չափման միավորների վրա: Ճիշտ է, համասեռ մեծությունները միշտ կարելի է գումարել, սակայն գումարի թվային արժեքը ստանալու համար անհրաժեշտ է գումարելիները ներկայացնել չափման միևնույն միավորներով:

Մեծությունների գումարման օրենքը

Չափման նույն միավորն ունեցող երկու մեծությունների գումարը չափման նույն միավորն ունեցող մեծություն է, որի թվային արժեքը հավասար է գումարելիների թվային արժեքների գումարին: Այսինքն՝ տրված մեծության չափման e միավորի և կամայական x և y իրական թվերի համար՝

$$xe + ye = (x + y)e :$$

Օրինակ՝ x մ + y մ = $(x + y)$ մ, x կգ + y կգ = $(x + y)$ կգ:

Թեմա 1.3. ՀԱՆՈՒՄԸ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎՈՒՄ

1. Հանման գործողության սահմանումը: Ինչքա՞ն գումար է մնում մեզ մոտ, երբ մենք ծախսում ենք մեր դրամի մի մասը: Ինչքա՞ն պետք է լինի գնումների դիմաց մեր տված դրամի մանրը: Ինչպե՞ս որոշենք մարդու տարիքը, երբ հայտնի է նրա ծննդյան թվականը: Այս և նման բազմաթիվ խնդիրների լուծման համար մեզանից յուրաքանչյուրն ամեն օր բազմիցս կատարում է հանման գործողություն:

Հանման գործողության սահմանումը

Մի արտահայտությունից հանել երկրորդը՝ նշանակում է գտնել մի այնպիսի արտահայտություն, որը գումարելով երկրորդին՝ ստացվում է առաջինը: Տրված երկու արտահայտությունների հանման արդյունքը կոչվում է նրանց տարբերություն:

Այսպիսով՝ a և b արտահայտությունների տարբերությունը այն c արտահայտությունն է, որի համար $b+c=a$: a և b արտահայտությունների տարբերությունը գրառվում է $a-b$ տեսքով: Այն կարդացվում է այսպես՝ «a մինուս b» կամ «a-ից հանած b», կամ «a-ի և b-ի տարբերությունը»:

Բերենք տարբերության մի քանի օրինակ:

ա. $17-9=8$, որովհետև $9+8=17$:

բ. $x-x=0$, որովհետև $x+0=x$:

գ. $3y-2y=y$, որովհետև $2y+y=3y$:

Այստեղ անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել «–» նշանի գործածության վրա: Նախկինում մենք «–» նշանը գործածել ենք կամայական արտահայտության հակադիրը գրառելու համար: Այդ նույն նշանը այստեղ գործածվում է երկու արտահայտությունների տարբերությունը գրառելու համար: Նման գործածության համար հիմք է ծառայում այն սերտ կապը, որ գոյություն ունի տարբերության և հակադիրի միջև:

Հակադիրը որպես փարբերություն

Կամայական a արտահայտության համար

$$-a=0-a:$$

Ապացուցումը	Փաստարկները
$a+(0-a)=0$	*տարբերության սահմանումը*
$0-a=-a$	*հակադիրի սահմանումը*
$-a=0-a$	*հավասարության համաչափության օրենքը*

2. Հանման, գումարման և հակադիրի կապը: Մենք արդեն գիտենք հանման գործողության սահմանումը: Մենք կարող ենք գտնել երկու իրական թվերի տարբերությունը: Հաշվել ենք նաև մի քանի հանրահաշվական արտահայտու-թյունների տարբերությունները: Իսկ ինչպե՞ս գտնենք կամայական երկու արտա-հայտությունների տարբերությունը:

Տարբերության արտահայտումը գումարի և հակադիրի միջոցով

Մի հանրահաշվական արտահայտությունից երկրորդ արտահայտությունը հանելու համար բավական է առաջինին ավելացնել երկրորդի հակադիրը: Այսինքն՝ կամայական a և b արտահայտությունների համար՝

$$a-b=a+(-b):$$

Ապացուցում: Իսկապես՝

$$b+\left(a+\left(-b\right)\right)=\left(b+\left(-b\right)\right)+a=0+a=a\,,\quad a-b=a+\left(-b\right):$$

Օրինակներ.

ա. $7-(-3)=7+(-(-3))=7+3=10$:

բ. $(a+1)-1=a+1+(-1)=a+0=a$:

Օգտվելով տարբերության և գումարման հատկություններից՝ հեշտությամբ կապացուցենք նաև հետևյալ հատկությունը:

Տարբերության արտահայտումը հակադիրի եվ գումարի միջոցով

Կամայական a, b արտահայտությունների համար՝ $a-b=-b+a$:

3. Տարբերության հատկությունները: Հանման գործողությունը գումարման և հակադիրի գործողությունների հետ ունի նաև մի շարք այլ կապեր, որոնց իմացությունը հեշտացնում է արտահայտությունների հետ գործողու-թյունների կատարումը:

Տարբերության հատկությունները

Կամայական a, b և c արտահայտությունների համար

ա. $a+\left(b-c\right)=\left(a+b\right)-c$, բ. $(a+b)-c=a+(b-c)$,

գ. $a-(b+c)=(a-b)-c$, դ. $-\left(a-b\right)=-a+b$,

ե. $a-\left(b-c\right)=\left(a+c\right)-b$:

$-(a-b) = -(a+(-b))$	*տարբերության արտահայտումը գումարով և հակադիրով*
$= -a+(-(-b))$	*գումարի հակադիրի հատկությունը*
$= -a+b$	*հակադիրի հակադիրի հատկությունը*
$-(a-b) = -a+b$	*հավասարության փոխանցական օրենքը*

4. Հանրահաշվական գումար: Դիտարկենք գումարման և հանման գործողությունները պարունակող որևէ արտահայտություն, օրինակ՝ $1+a-b-c$: Օգտվելով գործողությունների կատարման հերթականության օրենքից և գումարման ու հակադիրի միջոցով տարբերության արտահայտման հատկությունից՝ կստանանք

$$1+a-b-c = 1+a+(-b)+(-c):$$

Այսինքն՝ արտահայտությունը ներկայացրինք հանրահաշվական արտահայտությունների գումարի տեսքով: Ահա այս պատճառով տվյալ արտահայտությունը, որը չնայած գումարման հետ միասին պարունակում է նաև հանման գործողություն, կոչվում է ***հանրահաշվական գումար****:*

Հաճախ $1+a-b-c$ հանրահաշվական գումարի գումարելի կանվանենք նաև b -ն և c -ն: Կասենք, որ այդ հանրահաշվական գումարի մեջ 1 -ի և a -ի հետ միասին մտնում են նաև b -ն և c -ն, սակայն, առաջինները մտնում են դրական կամ $+$ նշանով, իսկ b -ն և c -ն՝ բացասական կամ $-$ նշանով:

Գումարման, հանման և հակադիրի գործողությունների հատկությունները հնարավորություն են տալիս ազատվել արտահայտության մեջ մտնող որոշ գումարելիներն ամփոփող փակագծերից՝ կատարել ***փակագծերի բացում****:* Փակագծերը բացելիս անհրաժեշտ է օգտվել հետևյալ կանոնից:

Փակագծերի բացման կանոնը

Եթե հանրահաշվական գումարի մեջ որոշ գումարելիներ գրված են փակագծերի մեջ, ապա կարելի է ազատվել այդ փակագծերից հետևյալ կերպ.

ա. պահպանել այդ գումարելիներից յուրաքանչյուրի նշանը, եթե ձախ փակագծից առաջ եղել է $+$ նշանը,

բ. փոխել այդ գումարելիներից յուրաքանչյուրի նշանը, եթե ձախ փակագծից առաջ եղել է $-$ նշանը:

Օրինակներ.

ա. $x-(2+x)+(1-x) = x-2-x+1-x = -x-1$:

բ. $-(z+1)-(-(2+z)+3)=-z-1-(-2-z+3)=-z-1+z-1=-2$։

Մենք կարող ենք նաև արտահայտության մեջ մտնող որոշ գումարելիներ ամփոփել փակագծերի մեջ՝ կատարել ***փակագծերի փակում***: Փակագծերը փակելիս անհրաժեշտ է օգտվել հետևյալ կանոնից:

Փակագծերի փակման կանոնը

Հանրահաշվական գումարի որոշ գումարելիներ կարելի է ամփոփել փակագծերի մեջ հետևյալ կերպ.

ա. պահպանել այդ գումարելիներից յուրաքանչյուրի նշանը, եթե ձախ փակագծից առաջ դրվում է $+$ նշանը,

բ. փոխել այդ գումարելիներից յուրաքանչյուրի նշանը, եթե ձախ փակագծից առաջ դրվում է $-$ նշանը :

Նկատենք, որ արտահայտության սկզբում գումարելիի կամ փակագծի դիմաց, սովորաբար $+$ նշանը չի դրվում:

Օրինակներ.

ա. $-3x+4-2y=-3x+(4-2y)$,

ա. $1-6x+2a=1-(6x-2a)$:

5. Հանումը և պակասեցումը: Մենք գիտենք որոշել ավելացնելուց հետո ստացված առարկայի քանակությունը. դրա համար պետք է սկզբնական քանակությանը գումարենք ավելացված քանակությունը: Իսկ ինչպե՞ս որոշենք պակասեցնե-լուց հետո ստացված առարկայի քանակությունը: Նախ դիտարկենք մեկ օրինակ:

Գյուղացին ուներ 2800 քառ. մ հողամաս: Որքա՞ն հողամաս մնաց նրան, երբ նա վաճառեց իր հողամասի քառորդ մասը:

2800-ի քառորդ մասը կլինի 700: Ուրեմն՝ գյուղացին վաճառել՝ իր հողամասը պակասեցրել է 700 քառ. մետրով: Մնացած հողամասի մեծությունը կլինի 2800 քառ.մ. -700 քառ.մ.:

Բերված օրինակում առարկայի մի մասի պակասեցումից ստացված քանակությունը գտնելու համար եղած քանակությունից հանեցինք պակասեց-ված քանակությունը: Հանման գործողության կարևոր կիրառություններից մեկը ստացվում է ահա այս ճանապարհով:

Պակասեցման հանման օրենքը

Մեծության x քանակություն ունեցող առարկայից նրա y քանակությունը պակասեցնելուց հետո մնացած քանակությունը կլինի $x-y$:

Հայոց լեզվում զանազան մեծություններ ունեցող առարկաների փոփոխությունը ցույց տալու համար պակասեցնել բառին զուգընթաց գործածվում են նաև հետևյալ աղյուսակում նշված բառերը:

առարկայի մեծությունը	«պակասեցնել» բառին զուգընթաց գործածվող բառերը
երկարություն	*օտարել, առանձնացնել, փոքրացնել, կարճացնել, կտրել ցածրացնել, ծանծաղեցնել, գործածել, օգտագործել*
մակերես	*օտարել , առանձնացնել, փոքրացնել, նեղացնել, գործածել, օգտագործել*
ծավալ	*առանձնացնել, օտարել, փոքրացնել, նվազեցնել, բարակացնել, սեղմել, հատել, գործածել, օգտագործել, թափել*
զանգված	*առանձնացնել, օտարել, փոքրացնել, թեթևացնել, քչացնել, թափել, գործածել, օգտագործել, նվազեցնել*
ժամանակ	*փոքրացնել, կարճացնել, նվազեցնել, կրճատել*
արագություն	*փոքրացնել, ցածրացնել, իջեցնել, նվազեցնել*
ջերմություն	*փոքրացնել, սառեցնել, ցածրացնել, տալ, իջեցնել,*
գին	*փոքրացնել, քչացնել, իջեցնել, էժանացնել, գործածել, օգտագործել, ծախսել, վճարել*
տոկոսադրույք	*փոքրացնել, իջեցնել, նվազեցնել*

Այսպես, օրինակ, մենք ասում ենք. ճանապարհը կարճացրին, ջրհորը ծանծաղեց, պարանը կտրեցին, սենյակը փոքրացրին, միջանցքը նեղացավ, տակառը սեղմվեց, ավտոմեքենայի արագությունը իջավ և այլն: Բոլոր այս օրինակներում ստորոգյալները գործածված են որպես «պակասեցնել» բառի հոմանիշներ:

6. Հանումը և համեմատումը: Երբ ամերիկացի Իոն Միննոքիին տարան հիվանդանոց, նրան տեղավորելու համար անհրաժեշտ եղավ միացնել երկու մահճակալ: Իսկ նրան փորի վրա շրջել կարողացան միայն 13 ուժեղ տղամարդիկ: Բանն այն էր, որ Իոն Միննոքին աշխարհում երբևէ ապրած ամենածանր տղամարդն էր: Նրա քաշը 635 կգ էր: Ամենածանր կինը եղել է նույնպես ամերիկացի՝ Փերսի Վաշինգտոնը: Սակայն նա կշռել է «ընդամենը» 399,1 կգ: Ինչքա՞ն է ամենածանր տղամարդը ավելի կշռել ամենածանր կնոջից: Որպեսզի լուծենք այս խնդիրը, մենք պետք է համեմատենք զանգվածի երկու քանակություններ և առաջինից հանենք երկրորդը, այսինքն, գտնենք 635 կգ - 399,1 կգ տարբերությունը:

Դիտարկված օրինակում իրագործվում է հանման գործողության մյուս կարևոր կիրառությունը. այն կապված է առարկաների համեմատման հետ:

Քանակությունների համեմատման հանման օրենքը

Եթե x-ը և y-ը միևնույն սեռի առարկաների երկու քանակություններ են, ապա $x-y$ տարբերությունը ցույց է տալիս, թե ինչքանով է առաջինի քանակությունը տարբերվում երկրորդի քանակությունից.

ա. եթե $x-y>0$, ապա առաջին քանակությունը ավելի է երկրորդ քանակությունից $x-y$ տարբերության չափով,

բ. եթե $x-y=0$, ապա առաջին քանակությունը հավասար է երկրորդ քանակությանը,

գ. եթե $x-y<0$, ապա առաջին քանակությունը պակաս է երկրորդ քանակությունից $y-x$ տարբերության չափով:

Քանակությունների համեմատության ժամանակ «ավելի» և «պակաս» բառերին զուգընթաց հայոց լեզվում զանազան մեծություններ ունեցող առարկաների համար գործածվում են նաև հետևյալ աղյուսակում նշված բառերը:

Այսպես, օրինակ, մենք ասում ենք. ճանապարհներից մեկը երկար է մյուսից, 4 կգ ալյուրը ծանր է 3 կգ ալյուրից, ամիսը երկար է շաբաթից, ինքնաթիռի արագությունը բարձր է ավտոմեքենայի արագությունից և այլն:

Առարկաների փոփոխության հակադիրի օրենքը

ա. Առարկայի պակասեցումը x քանակությամբ նույնն է, ինչ նրան $-x$ քանակության ավելացումը:

բ. Առարկայի ավելացումը x քանակությամբ նույնն է, ինչ նրանից $-x$ քանակության պակասեցումը:

7. Հանումը և հավասարությունը: Վաճառողը ուզում էր կշռել 4 կգ խնձոր, սակայն ուներ միայն մեկ հատ մեկ և մեկ հատ էլ հինգ կիլոգրամանոց կշռաքար: Նա կշեռքի մի նժարին դրեց 5 կիլոգրամանոց կշռաքարը: Մյուս նժարի վրա դրեց 1 կիլոգրամանոցն ու սկսեց նժարը լցնել խնձորով: Երբ կշեռքի նժարները հավասարվեցին, վաճառողը հայտարարեց, որ արդեն նժարին լցված է 4 կիլոգրամ խնձոր: Արդյո՞ք իրավացի էր վաճառողը:

Եթե նժարի մեջ խնձորի քանակությունը՝ մեկ կիլոգրամանոցի հետ միասին, նշանակենք a կիլոգրամով, ապա նժարների հավասարակշռությունը ցույց է տալիս, որ $a = 5$: Այս հավասարության երկու մասերից հանենք 1, կստանանք՝ $a - 1 = 5 - 1$: Ստացված հավասարության ձախ մասը նժարի մեջ եղած խնձորի քանակությունն է, իսկ աջ մասը հավասար է 4-ի: Ուրեմն, իսկապես, վաճառողը կշռել է 4 կգ խնձոր:

Այս խնդիրը լուծելիս մենք $a = 5$ հավասարության երկու մասից հանեցինք 1 և նորից ստացանք հավասարություն՝ $a - 1 = 5 - 1$: Արդյո՞ք դրա իրավունքը ունեինք: Այս հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ հատկությունը:

Հանման կապը հավասարության հետ

Հավասարության երկու մասերից միևնույն արտահայտությունը հանելիս նորից ստացվում է հավասարություն : Այսինքն՝ կամայական x, y և z արտահայտությունների համար

$$\text{եթե } x = y\text{, ապա } x - z = y - z:$$

Ապացուցումը	Փաստարկները
$x = y$	*պայմանը*
$x + (-z) = y + (-z)$	*հավասարության գումարային հատկությունը*
$x - z = y - z$	*հանման կապը գումարի և հակադիրի հետ*

Դիտարկենք հաջորդ օրինակը: Կշեռքի նժարներին դրված են զանգվածի երկու՝ մեզ անհայտ քանակություններ՝ x և y: Կշռումը ցույց է տվել, որ այդ քանակություններն իրար հավասար են, այսինքն՝ $x = y$: Առաջին նժարից պակասեցնենք z, իսկ երկրորդ նժարից՝ t քանակություններ: Այդ դեպքում, առաջին նժարին կմնա $x - z$, իսկ երկրորդ նժարին՝ $y - t$ քանակություններ: Եթե կշռումից պարզվի, որ պակասեցված քանակություններն իրար հավասար են, այսինքն՝ $z = t$, ապա իրար հավասար կլինեն նաև մնացած քանա-կությունները, այսինքն՝ $x - z = y - t$:

Այսպիսով, մենք հանեցինք տրված հավասարությունների ձախ մասերը իրարից, աջ մասերը՝ իրարից և նորից ստացանք հավասարություն: Այդպիսի հատկությամբ օժտված են նաև կամայական երկու հավասարություններ:

Հավասարությունների հանման հատկությունը

Երկու հավասարություններ մաս առ մաս իրարից հանելիս ստացվում է հավասարություն: Այսինքն՝ կամայական x, y, z և t արտահայտությունների համար

$$\text{եթե } x = y,\ z = t, \text{ ապա } x - z = y - t:$$

Ապացուցումը	Փաստարկները
$x = y \quad z = t$	*պայմանները*
$-z = -t$	*հակադիրների հավասարության հատկությունը*
$x + (-z) = y + (-t)$	*հավասարությունների գումարման հատկությունը*
$x - z = y - t$	*տարբերության արտահայտումը գումարով և հակադիրով*

8. Հանումը և հավասարումը: Հավասարումների հանգող խնդիրներում հաճախակի են մասնակցում նաև հանման և հակադիրի գործողությունները: Բերենք մեկ օրինակ:

Պաղպաղակ գնելուց հետո Գայանեի մոտ մնաց 850 դրամ: Որքա՞ն դրամ ուներ Գայանեն, եթե պաղպաղակն արժեր 350 դրամ:

Խնդրում նկարագրված իրադրությունը գրառենք հանրահաշվորեն:

x	*դրամի սկզբնական քանակությունը*
$x - 350$	*գնելուց հետո մնացած քանակությունը*
$x - 350 = 850$	*խնդրի պայմանը*

Այսպիսով՝ խնդիրը հանգեց $x - 350 = 850$ հավասարման լուծմանը: Ստացված և նման այլ հավասարումների լուծման հնարավորություն է տալիս հետևյալ հատկությունը:

$x - a = b$ հավասարման լուծումը

$x - a = b$ հավասարման լուծումն է $x = b + a$, որտեղ a-ն և b-ն կամայական արտահայտություններ են:

Ապացուցում: Իսկապես,

$$(b + a) - a = b + a - a = b + 0 = b:$$

Այսինքն՝ $b + a$ -ն $x - a = b$ հավասարման լուծումն է:

Հանման գործողությունը հնարավորություն է տալիս նաև ավելի պարզ ձևով արտահայտել $x + a = b$ հավասարման լուծումը:

Խնդիր: Ցույց տալ, որ $x + a = b$ հավասարման լուծումն է $x = b - a$:

Լուծում: Իսկապես.

$$x + a = b,\ x = b + (-a) = b - a,\quad x = b - a:$$

Լուծենք հանման գործողությունը պարունակող հավասարման ևս մի տեսակ:

$a - x = b$ հավասարման լուծումը

$a - x = b$ հավասարման լուծումն է $x = a - b$, որտեղ a-ն և b-ն կամայական արտահայտություններ են:

Դիտարկենք հավասարումների լուծման մի քանի օրինակ:

ա. $x - 2{,}5 = 3{,}5$, $x = 3{,}5 + 2{,}5$, $x = 6$:

բ. $3 - (x - 2) = 4$, $-x + 5 = 4$, $-x = -1$, $x = 1$:

գ. $x - (3{,}1 - x) + (1{,}1 - x) = 4{,}5$, $x - 2 = 4{,}5$, $x = 6{,}5$:

9. Մեծությունների հանումը: Մենք արդեն գիտենք, որ մեծությունների տարբերությունը անհրաժեշտ է առարկաների պակասեցման և համեմատման վերաբերյալ զանազան հարցերի պատասխանները ստանալու համար: Իսկ ինչպե՞ս գտնենք մեծությունների տարբերությունը:

Մեծությունների տարբերության սահմանումը

Երկու մեծությունների տարբերությունը այն մեծությունն է, որը գումարելով երկրորդ մեծությանը՝ ստացվում է առաջին մեծությունը: Այսինքն՝ x և y մեծությունների տարբերությունը այն z մեծությունն է, որի համար $y + z = x$:

Օրինակ, 5մ և 3մ մեծությունների տարբերությունը 2մ մեծությունն է, քանի որ 3մ $+ 2$մ $= 5$մ:

Մեծությունների տարբերությունը գտնելու համար անհրաժեշտ է օգտվել հետևյալ հատկությունից

Մեծությունների հանման հատկությունը

Չափման նույն միավորն ունեցող երկու մեծությունների տարբերությունը չափման նույն միավորն ունեցող մեծություն է, որի թվային արժեքը հավասար է տրված մեծությունների թվային արժեքների տարբերությանը: Այսինքն՝ որևէ մեծության չափման e միավորի և կամայական x, y իրական թվերի համար՝

$$xe - ye = (x - y)e:$$

Ապացուցում: Քանի որ

$$ye+(x-y)e=(y+x-y)e=xe\,,$$

ապա, համաձայն նախորդ սահմանման՝ $xe-ye=(x-y)e$:

Ինչպես գումարման ժամանակ, մեծությունների տարբերությունը կազմելիս նույնպես պետք է հաշվի առնել, որ իրարից կարելի է հանել միայն միևնույն սեռի մեծությունները: Իսկ համասեռ մեծությունները հանելուց անհրաժեշտ է նախ տրված մեծություններն արտահայտել չափման միևնույն միավորով և նոր միայն կատարել նրանց թվային արժեքների հանում:

Օրինակ՝

1,2 տ - 660 կգ = 1200 կգ - 660 կգ =(1200 - 660) կգ =540 կգ: